МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем

Материалы
XIII Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов

Россия, г. Пенза, 3–6 июня 2019 г.

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Mathematical and Computer Modelling of Natural Science and Social Problems (MCM-2019)

Proceedings of the Thirteenth International
Conference MCM-2019

Penza, Russian Federation, 3–6 June, 2019

E d i t e d b y
Ilya V. Boikov

Пенза • Издательство ПГУ • 2019

УДК 51
ББК 22.1
М64

М64 **Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем** : материалы XIII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 3–6 июня 2019 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2019. – 304 с.

ISBN 978-5-907185-34-0

Отражены основные результаты работы XIII Международной научно-технической конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теория приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, биологии; математические модели в физике, нанотехнике и нанобиологии; нейроматематика и нейрокомпьютеры.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 21.1

О р г а н и з а ц и о н н ы й к о м и т е т

И. В. Бойков, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *председатель*;
Д. В. Артамонов, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. И. Горбаченко**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. К. Задирака**, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН Украины (Киев, Украина); **В. П. Ильин**, д.ф.-м.н., профессор (Новосибирск, Россия); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. В. Маркин**, д.социол.н., профессор (Москва, Россия); **М. В. Носков**, д.ф.-м.н., профессор (Красноярск, Россия); **В. И. Половинкин**, д.ф.-м.н., профессор (С.-Петербург, Россия); **Д. Г. Саникидзе**, д.ф.-м.н., профессор (Тбилиси, Грузия); **В. С. Сизиков**, д.т.н., профессор (С.-Петербург, Россия); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **Л. А. Сухарев**, к.ф.-м.н., доцент (Саранск, Россия); **С. Фаудаоглы**, д.ф.-м.н., профессор (Измир, Турция); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия)

О т в е т с т в е н н ы й с е к р е т а р ь к о н ф е р е н ц и и

А. Н. Тында, к.ф.-м.н., доцент (Пенза, Россия)

Приказ о проведении XIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» № 526/о от 22.04.2019

ISBN 978-5-907185-34-0

© Пензенский государственный университет, 2019

ДЛИНА ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЕ КАЛОДЖЕРО

Е. С. Алексеева, А. Э. Рассадин

Лаборатория бесконечномерного анализа
и математической физики механико-математического факультета
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова,
г. Москва, Россия
E-mail: kometarella@mail.ru; brat_ras@list.ru

Методы исследования динамической системы с одной степенью свободы вида:

$$\ddot{x} = -U'(x), \tag{1}$$

где $x \in R$, $U(x)$ – достаточно гладкая функция, имеющая смысл потенциальной энергии системы, а точка обозначает дифференцирование по времени, были сформулированы ещё К. Вейерштрассом [1]. В частности, хорошо известно [2], что дифференциальное уравнение (1) обладает первым интегралом:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = h, \tag{2}$$

где постоянная h является энергией системы, и что вблизи минимума $U(x)$ уравнение (2) задаёт на плоскости $(x, \dot{x})$ однопараметрическое семейство γ_h замкнутых фазовых траекторий. Однако вопрос о зависимости длины такой замкнутой траектории L от соответствующей ей энергии h, весьма интересный с точки зрения теории интегралов Фейнмана [3], совершенно не изучен.

Если $x(t,h)$ – решение уравнения (1), соответствующее γ_h, то её длина $L(h)$ вычисляется по элементарной формуле дифференциальной геометрии:

$$L(h) = \int_0^{T(h)} \sqrt{\dot{x}^2(t,h) + \ddot{x}^2(t,h)} \cdot dt, \tag{3}$$

причём период колебаний $T(h)$ определяется известным выражением [2]:

$$T(h) = \sqrt{2} \cdot \int_{x_-(h)}^{x_+(h)} \frac{dx}{\sqrt{h - U(x)}}, \tag{4}$$

пределы интегрирования в котором $x_-(h)$ и $x_+(h)$ являются корнями уравнения $U(x_\pm(h)) = h$.

С помощью уравнений (1) и (2) из подинтегрального выражения формулы (3) для длины γ_h можно исключить явную зависимость от времени:

$$L(h) = 2 \cdot \int_{x_-(h)}^{x_+(h)} \sqrt{1 + \frac{[U'(x)]^2}{2 \cdot [h - U(x)]}} \cdot dx, \tag{5}$$

но оказывается, что в подавляющем большинстве интересных случаев этот интеграл не берётся. Следовательно, возникает задача оценки величины (5) сверху и снизу.

Её оценка сверху получается применением к формуле (3) неравенства Коши-Буняковского:

$$L(h) \le \sqrt{T(h)} \cdot \sqrt{\int_0^{T(h)} [\dot{x}^2(t,h) + \ddot{x}^2(t,h)] \cdot dt}, \tag{6}$$

а её оценка снизу вытекает из известного [4] изопериметрического неравенства $L^2(h) \ge 4 \cdot \pi \cdot F(h)$, в котором $F(h)$ – площадь, ограничиваемая кривой γ_h, выражающаяся через переменную действия системы (1): $F(h) = 2 \cdot \pi \cdot I(h)$ [2].

Таким образом, для длины кривой γ_h верно следующее неравенство:

$$L(h) \ge 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot I(h)}, \tag{7}$$

где

$$I(h) = \frac{1}{\pi} \int_{x_-(h)}^{x_+(h)} \sqrt{2 \cdot [h - U(x)]} \cdot dx. \tag{8}$$

Далее, введём операцию усреднения функции $f(t,h)$ по периоду (4) движения по кривой γ_h:

$$\overline{f} = \frac{1}{T(h)} \cdot \int_0^{T(h)} f(t,h) \cdot dt, \tag{9}$$

тогда можно переписать оценку (6) для интеграла (5) следующим образом:

$$L(h) \le T(h) \cdot \sqrt{\overline{\dot{x}^2} + \overline{\ddot{x}^2}} \,. \tag{10}$$

Наконец, поскольку движение по кривой γ_h периодично по времени с периодом (4), то обобщённая координата системы $x(t,h)$, соответствующая этому движению, может быть разложена в ряд Фурье:

$$x(t,h) = x_0(h) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(h) \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot t}{T(h)}, \tag{11}$$

где $x_0(h) = \overline{x(t,h)}$ и $x_n(h) = 2 \cdot \overline{x(t,h) \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot t}{T(h)}}$ ($n \in N$).

Дифференцируя почленно разложение (11) по времени, получим ряды Фурье для скорости:

$$\dot{x}(t,h) = -\frac{2 \cdot \pi}{T(h)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x_n(h) \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot t}{T(h)} \tag{12}$$

и ускорения:

$$\ddot{x}(t,h) = -\left(\frac{2 \cdot \pi}{T(h)}\right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x_n(h) \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot t}{T(h)}. \tag{13}$$

Применение операции усреднения за период (9) к квадратам величин (12) и (13) даёт:

$$\overline{\dot{x}^2(t,h)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T(h)}\right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x_n^2(h), \; \overline{\ddot{x}^2(t,h)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T(h)}\right)^4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot x_n^2(h). \tag{14}$$

Формулы (14) – это обычные равенства Парсеваля-Стеклова [5], которые удобно переписать в следующем виде:

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{x_1^2(h)}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T(h)}\right)^2 \cdot (1 + K^2[\dot{x}](h)),$$

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{x_1^2(h)}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T(h)}\right)^4 \cdot (1 + K^2[\ddot{x}](h)), \tag{15}$$

где согласно обычному правилу, принятому в радиотехнике [6], для скорости и ускорения введены коэффициенты нелинейных искажений (КНИ):

$$K[\dot{x}](h) = \frac{1}{|x_1(h)|} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x_n^2(h)}, \; K[\ddot{x}](h) = \frac{1}{|x_1(h)|} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot x_n^2(h)}. \tag{16}$$

Из формул (10) и (15) видно, что длина кривой γ_h определяется характеристиками ангармонизма колебаний (16), то есть тесно связана с отличием этой фазовой траектории от эллипса.

Проиллюстрируем развитую выше общую теорию на примере потенциала Калоджеро [7]:

$$U(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2. \tag{17}$$

Закон сохранения энергии (2), определяющий замкнутые фазовые траектории γ_h, в этом случае сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\dot{x}^2}{2}+x^2+\frac{1}{x^2}=h+2. \tag{18}$$

В области $x>0$ точки поворота потенциала (17), соответствующие энергии $h>0$, есть:

$$x_{\pm}(h)=\sqrt{\frac{h+2}{2}\pm\frac{\sqrt{h\cdot(h+4)}}{2}}, \tag{19}$$

Вычисление длины кривой (18) по формуле (5) приводят к интегралу:

$$L(h)=2\cdot\int\limits_{x_-(h)}^{x_+(h)}\sqrt{\frac{h\cdot x^6+(x^2-1)^2\cdot(x^4+4\cdot x^2+2)}{h\cdot x^2-(x^2-1)^2}}\cdot\frac{dx}{x^2}. \tag{20}$$

Этот интеграл является гиперэллиптическим интегралом и не берётся в элементарных функциях [8], поэтому оценка его снизу и сверху с помощью неравенств (7) и (10) весьма целесообразна.

Уравнение движения (1) для потенциала (17) имеет вид:

$$\ddot{x}=-2\cdot x+\frac{2}{x^3}. \tag{21}$$

Легко убедиться в том, что в области $x>0$ точное решение этого дифференциального уравнения равно:

$$x(t,h)=+\sqrt{1+\frac{h}{2}+\frac{\sqrt{h\cdot(h+4)}}{2}\cdot\cos(2\cdot\sqrt{2}\cdot t)}, \tag{22}$$

причём максимальное и минимальное значения функции (22) совпадают с выражениями (19).

Из формулы (22) ясно, что период колебаний частицы в потенциале (17) не зависит от её энергии и равен: $T=\pi/\sqrt{2}$, то есть система (21) является изохронной [7].

Далее, вычисление по формуле (8) с помощью выражений (19) переменной действия для потенциала (17) даёт: $I(h) = h/\sqrt{8}$.

Таким образом, для системы (21) оценка (7) длины кривой γ_h сводится к:

$$L(h) \geq 2^{\frac{3}{4}} \cdot \pi \cdot h^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Для того, чтобы определить верхнюю границу для длины кривой (18), нам потребуются следующие средние за период:

$$\overline{x^2} = \frac{h+2}{2},\ \overline{\frac{1}{x^2}} = 1\ ,\ \overline{\frac{1}{x^6}} = 1 + \frac{3 \cdot h \cdot (h+4)}{8}, \tag{24}$$

которые находятся элементарным интегрированием с помощью формулы (21).

Тогда, усредняя за период уравнение (18), с помощью выражений (24) найдём:

$$\overline{\dot{x}^2} = h. \tag{25}$$

Эта формула означает, что в потенциале (17) средние за период значения кинетической и потенциальной энергии частицы равны — точно так же, как и для гармонического осциллятора.

Наконец, возводя в квадрат обе части уравнения (21), применяя к ним операцию (9) и учитывая соотношения (24), вычислим, что:

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{h \cdot (3 \cdot h + 16)}{2}. \tag{26}$$

Подставляя средние (25) и (26) в неравенство (10), получим, что для длины кривой γ_h в системе (21) справедлива оценка сверху:

$$L(h) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{h \cdot (3 \cdot h + 18)}. \tag{27}$$

В заключение выведем явные выражения для КНИ (16) скорости и ускорения в системе (21). Формулы (15) означают, что для этого надо определить амплитуду первой гармоники в ряде Фурье (11):

$$x_1(h) = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \cos(2 \cdot \sqrt{2} \cdot t) \cdot \sqrt{1 + \frac{h}{2} + \frac{\sqrt{h \cdot (h+4)}}{2} \cdot \cos(2 \cdot \sqrt{2} \cdot t)} \cdot dt. \tag{28}$$

Интеграл (28) удаётся вычислить, применяя технику, развитую в работе [9]:

$$x_1(h) = \frac{4 \cdot x_+(h)}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{(2 - k^2(h)) \cdot \mathrm{E}(k(h)) - 2 \cdot (1 - k^2(h)) \cdot \mathrm{K}(k(h))}{k^2(h)}, \tag{29}$$

где $\mathrm{K}(k)$ и $\mathrm{E}(k)$ – полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно с модулем

$$k(h)=\sqrt{\frac{2\cdot\sqrt{h\cdot(h+4)}}{h+2+\sqrt{h\cdot(h+4)}}}\,.$$

Таким образом, комбинируя формулы (25), (26) и (29), получим для КНИ скорости в системе (21):

$$K[\dot{x}](h)=\sqrt{\frac{h}{4\cdot x_1^2(h)}-1} \tag{30}$$

и для КНИ ускорения:

$$K[\ddot{x}](h)=\sqrt{\frac{h\cdot(3\cdot h+16)}{64\cdot x_1^2(h)}-1}\,. \tag{31}$$

Из выражений (29)-(31) следует, что

$$\lim_{h\to 0+0} K[\dot{x}](h)=\lim_{h\to 0+0} K[\ddot{x}](h)=0\,.$$

Это означает отсутствие нелинейных искажений при гармонических колебаниях частицы вблизи минимума потенциала (17) в точке $x=1$. Однако с ростом энергии поведение функций (30) и (31) различается качественно: КНИ ускорения неограниченно возрастает, а КНИ скорости ограничен сверху горизонтальной асимптотой

$$\sqrt{\frac{9\cdot\pi^2}{64}-1}\approx 0{,}623\,.$$

Также в докладе для оценок длины фазовой траектории и коэффициентов нелинейных искажений скорости и ускорения при движении классической частицы единичной массы в потенциале Калоджеро приведены их графики в зависимости от энергии этой частицы.

Библиографический список

1. Weierstrass, K. Abhandlungen-2 / K. Weierstrass // Math. Werke. Bd. 2. – Berlin, 1897.

2. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.

3. Smolyanov, O. G. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula / O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman // Journal of Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 43, № 10. – P. 5161–5171.

4. Hurwitz, A. Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier / A. Hurwitz // Annales scientiques de l'École Normale Supérieure. – 1902. – Série 3. – Tome 19. – P. 357–408.

5. Ильин, В. А. Математический анализ. Продолжение курса / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М. : Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.

6. Потёмкин, В. В. Радиофизика / В. В. Потёмкин. – М. : Изд-во МГУ, 1988. – 264 с.

7. Калоджеро, Ф. Изохронные системы и их квантование / Ф. Калоджеро // Теоретическая и математическая физика. – 2007. – Т. 152, № 1. – С. 5–19.

8. Спрингер, Дж. Введение в теорию римановых поверхностей / Дж. Спрингер. – М. : ИЛ, 1960. – 344 с.

9. Kostromina, O. S. Total harmonic distorsions in an oscillatory circuit with a ferroelectric capacitor with a negative capacitance / O. S. Kostromina, A. A. Potapov, I. V. Rakut, A. E. Rassadin // Eurasian Physical Technical Journal. – 2017. – Vol. 14, № 2 (28). – P. 14–21.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА[1]

Б. Х. Имомназаров, Dang Quang A.[*], У. К. Турдиев[**], П. В. Коробов[***]

Институт вычислительной математики
и математической геофизики Сибирского отделения РАН,
г. Новосибирск, Россия;
*Центр информатики и вычислительной техники,
Вьетнамская академия наук и технологий,
Ханой, Вьетнам;
** Каршинский филиал ТУИТ,
г. Карши, Узбекистан
*** Арктический и Антарктический
научно-исследовательский институт,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: buned11998.07@mail.ru

Аналогия уравнения Бюргерса возникает, например, при исследовании слабо-нелинейной одномерной акустической волны, движущейся с линейной скоростью звука. В этом случае нелинейные по скоростям члены в системе уравнений типа Бюргерса происходят из зависимости скоростей звука от амплитуды звуковой волны, а члены со второй производной и разности скоростей представляют затухание звуковых волн, связанное с диссипацией энергии. Другими словами, эти члены обеспечивают непрерывность решений и представляют диссипативные процессы, связанные с производством энтропии. Эти члены, в свою очередь, обеспечивают неопрокидывание волн [1].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке НИР № 0315-2019-0005 и РФФИ (гранты 18-31-00120, 18-51-41002).

Рассматриваемая система является частным случаем системы уравнений двухскоростной гидродинамики в одномерном случае [2-5].

Постановка задачи

Рассмотрим для системы в полосе $\Gamma_{[0,T]} = \{(t,x): 0 \le t \le T, x \in R\}$

$$w_t + ww_x = \nu w_{xx} - \tilde{b}(w - \tilde{w}), \tag{1}$$

$$\tilde{w}_t + \tilde{w}\tilde{w}_x = \tilde{\nu}\tilde{w}_{xx} + b(w - \tilde{w}) \tag{2}$$

задачу Коши со следующими начальными данными

$$w|_{t=0} = w_0(x), \ \tilde{w}|_{t=0} = \tilde{w}_0(x), \ x \in R. \tag{3}$$

В формулах (1) и (2) величины w и $\tilde{w}$ можно рассматривать, как скорости подсистем с размерностью $[x]/[t]$, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями ρ и $\tilde{\rho}$, $\tilde{b} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho} b$, b – коэффициент трения с размерностью $1/[t]$, который является аналогом коэффициента Дарси для пористых сред. Положительные константы ν и $\tilde{\nu}$ играют роль кинематических вязкостей подсистем с размерностью $[x]^2/[t]$.

Нас будут интересовать решения задачи Коши для системы уравнений типа Бюргерса (1), (2) в отличие, а именно $w(t,x)$, $\tilde{w}(t,x) \in C^{1,2}\left(\Gamma_{[0,T]}\right)$ – класс функций один раз непрерывно дифференцируемых по t и два раза непрерывно дифференцируемых по x.

Метод слабой аппроксимации для задачи Коши для системы уравнений типа Бюргерса

Рассмотрим относительно данных Коши w_0, $\tilde{w}_0$ задачи (1)-(3) предположим, что w_0, $\tilde{w}_0 \in C^2(R)$ и

$$\left|\frac{d^n w_0(x)}{dx^n}\right| \le c_n, \ \left|\frac{d^n \tilde{w}_0(x)}{dx^n}\right| \le \tilde{c}_n, \ x \in R, \ n = 0,1,2, \tag{4}$$

где c_n, $\tilde{c}_n$ – некоторые заданные неотрицательные постоянные.

Сначала рассмотрим случай бесконечно дифференцируемых данных Коши. Предположим, что w_0, $\tilde{w}_0 \in C^\infty(R)$ и

$$\left|\frac{d^n w_0(x)}{dx^n}\right| \le c_n, \ \left|\frac{d^n \tilde{w}_0(x)}{dx^n}\right| \le \tilde{c}_n, \ x \in R, \ n = 0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Следуя [6, 7], слабо аппроксимируем задачу Коши (1)-(3) задачей

$$w_t^\tau = 3\nu w_{xx}^\tau,\ \tilde{w}_t^\tau = 3\tilde{\nu}\tilde{w}_{xx}^\tau,\ n\tau < t \le \left(n+\frac{1}{3}\right)\tau, \tag{6}$$

$$w_t^\tau + 3w^\tau w_x^\tau = 0,\ \tilde{w}_t^\tau + 3\tilde{w}^\tau \tilde{w}_x^\tau = 0,\ \left(n+\frac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n+\frac{2}{3}\right)\tau, \tag{7}$$

$$w_t^\tau = -3\tilde{b}(w^\tau - \tilde{w}^\tau),\ \tilde{w}_t^\tau = 3b(w^\tau - \tilde{w}^\tau),\ \left(n+\frac{2}{3}\right)\tau < t \le (n+1)\tau, \tag{8}$$

$$w^\tau|_{t=0} = w_0(x),\ \tilde{w}^\tau|_{t=0} = \tilde{w}_0(x), \tag{9}$$

где $N\tau = t^*$, $N > 1$ – целое, $n = 0,1,\ldots,N-1$, и постоянная t^* удовлетворяет неравенству (14) (см. ниже).

Замечание. При построении решения задачи (6)-(9) на первых дробных шагах решается задача Коши для уравнения теплопроводности, а на вторых дробных шагах – задача Коши для уравнения переноса

$$u_t + 3uu_x = 0, \tag{10}$$

а на третьих дробных шагах – задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которого имеет вид

$$w^\tau = w_0(x) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}(\tilde{w}_0(x) - w_0(x))\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right),$$

$$\tilde{w}^\tau = \tilde{w}_0(x)e^{-\bar{b}t} + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}\tilde{w}_0(x)\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right)w_0(x) + \frac{3b}{\bar{b}}w_0(x)\left(1 - e^{-\bar{b}t}\right),$$

где $\bar{b} = 3(b + \tilde{b})$.

Известно, что в случае задачи Коши для уравнения (10) с начальными данными

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{11}$$

ограниченными вместе со своими производными, может иметь место градиентная катастрофа, то есть может существовать $t_1 > 0$, такое, что классическое решение u этой задачи существует в полосе $\Gamma_{[0,t_1]}$, само остается в этой полосе ограниченным, но производная u_x в окрестности некоторой точки (t_1, x^0) становится неограниченной: $u_x(t,x) \to \infty$ при $t \to t_1$, $x \to x^0$ [1, 8, 9].

Нетрудно показать, что если

$$\left|\frac{du_0(x)}{dx}\right| \le c_1, \tag{12}$$

то классическое решение задачи (10), (11) существует в полосе $\Gamma_{[0,t^*]}$, ограничено и

$$\left|u_x(t,x)\right| \le \frac{c_1}{1-3c_1 t},\ (t,x)\in \Gamma_{[0,t^*]}, \tag{13}$$

где t^* удовлетворяет неравенству

$$1-3c_1 t^* > 0.$$

Пусть выполнены соотношения (5) и постоянные c_1, $\tilde{c}_1$ и t^* удовлетворяют условиям

$$1-3c_1 t^* > 0,\ 1-3\tilde{c}_1 t^* > 0 \tag{14}$$

тогда решение w^τ и $\tilde{w}^\tau$ в полосе $\Gamma_{[0,t^*]}$ существует и ограничено вместе со всеми своими производными по переменным t, x.

Очевидно, что при любом фиксированном τ решение w^τ и $\tilde{w}^\tau$ задачи (22)-(25) ограничено независимо от величины

$$\left| w^\tau(t,x)\right| \le c_0,\ \left| \tilde{w}^\tau(t,x)\right| \le \tilde{c}_0. \tag{15}$$

Повторяя рассуждение из [8], можно показать ограниченность частных производных решений w^τ и $\tilde{w}^\tau$ по x любого порядка равномерно по τ:

$$\left|\frac{\partial^k w^\tau(t,x)}{\partial x^k}\right| \le C_k,\ \left|\frac{\partial^k \tilde{w}^\tau(t,x)}{\partial x^k}\right| \le \tilde{C}_k,\ (t,x)\in \Gamma_{[0,t^*]},\ k=0,1,\ldots, \tag{16}$$

где C_k, $\tilde{C}_k$ – некоторые положительные постоянные, такие что $C_0 = c_0$, $\tilde{C}_0 = \tilde{c}_0$.

Из этих оценок следует, что w^τ, $\tilde{w}^\tau$ и их производные по x любого порядка равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $\Gamma_{[0,t^*]}$. На основании теоремы Арцела диагональным способом можно выбрать подпоследовательность $\left\{w^{\tau_k}\right\}$, $\left\{\tilde{w}^{\tau_k}\right\}$ последовательностей $\left\{w^\tau\right\}$, $\left\{\tilde{w}^\tau\right\}$, сходящуюся в $\Gamma_{[0,t^*]}$ к функциям w и $\tilde{w}$ соответственно вместе со всеми производными по x, равномерно в каждой ограниченной области полосы $\Gamma_{[0,t^*]}$, вследствие чего функции w и $\tilde{w}$ имеют производные любого порядка по x и выполняются соотношения

$$w|_{t=0} = w_0(x),\ \tilde{w}|_{t=0} = \tilde{w}_0(x), \tag{17}$$

$$\left|\frac{\partial^k w(t,x)}{\partial x^k}\right| \le C_k,\ \left|\frac{\partial^k \tilde{w}(t,x)}{\partial x^k}\right| \le \tilde{C}_k,\ (t,x) \in \Gamma_{[0,t^*]},\ k = 0,1,\ldots, \qquad (18)$$

Единственность решения доказывается стандартным способом. Следовательно, и сами последовательности функций $\left\{w^\tau\right\}$, $\left\{\tilde{w}^\tau\right\}$ при $\tau \to 0$, сходятся равномерно в $\Gamma_{[0,t^*]}$ к w и $\tilde{w}$ соответственно, вместе со всеми производными. Случай, когда $w_0,\ \tilde{w}_0 \in C^2(R)$ доказывается с помощью средних функций [10].

Заключение

Таким образом, получена система уравнений типа Бюргерса. Эта система является упрощением системы уравнений модели двухжидкостной среды и отличается от системы уравнений модели двухжидкостной среды отсутствием давления и условиями несжимаемости. По этой причине семейство задач для системы типа Бюргерса иногда называется двухскоростной гидродинамикой без давления. Рассмотрена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухскоростной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса.

Библиографический список

1. Куликовский, А. Г. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешников, А. П. Чугайнова. – Москва, 2010. – 122 с.

2. Доровский, В. Н. Континуальная теория фильтрации / В. Н. Доровский // Геология и геофизика. – 1989. – № 7. – С. 39–45.

3. Доровский, В. Н. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями / В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко // Прикладная механика и техническая физика. – 1992. – № 3. – С. 94–105.

4. Доровский, В. Н. Теория частичного плавления / В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко // Геология и геофизика. – 1989. – № 9. – С. 56–64.

5. Перепечко, Ю. В. Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде / Ю. В. Перепечко, К. Э. Сорокин, Х. Х. Имомназаров // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XVII Междунар. конф. – Ростова-на-Дону, 2014. – С. 166–169.

6. Белов, Ю. Я. Решение задачи Коши для системы уравнений типа Хопфа методом слабой аппроксимации / Ю. Я. Белов, Г. В. Демидов // Численные методы механики сплошной среды. – 1970. – Т. 1, № 2. – С. 3–16.

7. Демидов, Г. В. Метод слабой аппроксимации / Г. В. Демидов, Н. Н. Яненко // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными. – Москва : Изд-во МГУ, 1978. – Т. 1. – С. 100–102.

8. Рапута, В. Ф. Метод слабой аппроксимации для задачи Коши в шкале банаховых пространств / В. Ф. Рапута // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1975. – Т. 6(1). – С. 93–96.

9. Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю. Я. Белов, С. А. Кантор. – Красноярск : Краснояр. гос. ун-т, 1999. – 236 с.

10. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 255 с.

ЛУЧЕВОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОРОУПРУГОСТИ ДЛЯ SH-ВОЛН[1]

Х. Х. Имомназаров, В. В. Герасимов*

Институт вычислительной математики
математической геофизики Сибирского отделения РАН,
г. Новосибирск, Россия;
*Институт информационных
и вычислительных технологий,
г. Алматы, Казахстан
E-mail: imom@omzg.sscc.ru

При конечной скорости распространения энергии в каждый момент времени возмущение захватывает область конечного размера. Поэтому в любой момент времени существует поверхность, разделяющая возмущенную и невозмущенную области. Эту поверхность называют фронтом возмущения или фронтом волны. Следовательно, распространение возмущения можно описать, как разрастание поверхности фронта. Если в момент $t = t_1$ поверхность фронта задается поверхностью S_1, а через очень малый интервал времени Δt в момент $t_2 = t_1 + \Delta t$ – поверхностью S_2, то это означает, что возмущение с поверхности S_1 распространилось на поверхность S_2, т. е. прошло в среде некоторый путь. Если в произвольной точке $A_1(x_1, y_1, z_1)$ поверхности S_1 построить нормаль к этой поверхности $\vec{n}(A)$, то она пересечет поверхность S_2 в некоторой точке $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Отрезок $A_1A_2 = \Delta n$ – это путь, пройденный волной за время Δt. Направление распространения волны в точке $A_1(x_1, y_1, z_1)$ указывается вектором $\vec{n}(A)$. Естественно принять, что скорость распространения возмущения (волны) $v(A) = \Delta n / \Delta t$. В общем случае она мо-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке НИР № 0315-2019-0005 и гранта МОН РК №AP05131026.

жет зависеть от положения точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Если среда однородна, то нет оснований считать, что скорость от точки к точке тела изменяется. В неоднородной среде, когда изменяются упругие модули и плотность, скорость также может стать функцией координат, т.е. $v = v(x, y, z)$.

Постановка задачи

Рассмотрим случай, когда векторы скорости смещений зависят только от t и z. Распространение сейсмических волн в пористом полупространстве $z > 0$, когда происходит потеря энергии обусловленной коэффициентом трение $\chi(z)$ описывается следующей системой уравнений

$$\rho_s(z)U_{tt} = (\mu(z)U_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)\left(U_t - V_t\right),\ V_t = \chi(z)\rho_l(z)\left(U - V\right), \quad (1)$$

Здесь U и V – компоненты векторов смещений частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальными плотностями $\rho_s(z)$ и $\rho_l(z)$, соответственно.

Предположим, что упруго-пористая среда покоится при $t < 0$:

$$U|_{t=0} = 0,\ V|_{t=0} = 0,\ U_t\big|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Пусть на границе $z = 0$ приложена сила с импульсом [1]:

$$\mu U_z\big|_{z=0} = F(t), \quad (3)$$

Здесь $F(t) = \delta(t) + f(0)\varepsilon(t) + \ldots$, $\delta(t)$ – дельта функции Дирака, $\varepsilon(t)$ – функция Хевисайда.

Требуется по этой информации и заданным функциям, непрерывно дифференцируемым $\rho_s(z)$ и $\mu(z)$, непрерывным $\rho_l(z)$, $\chi(z)$, определить волновые поля $U(t,z)$, $V(t,z)$.

Решение задачи (1)–(3) ищем в виде лучевого ряда

$$U(t,z) = \alpha^s(z)\varepsilon(t - \tau(z)) + \beta^s(z)(t - \tau(z))_+ + \frac{1}{2}\gamma^s(z)(t - \tau(z))_+^2 + \ldots. \quad (4)$$

$$V(t,z) = \alpha^l(z)\varepsilon(t - \tau(z)) + \beta^l(z)(t - \tau(z))_+ + \frac{1}{2}\gamma^l(z)(t - \tau(z))_+^2 + \ldots, \quad (5)$$

где коэффициенты $\alpha^s(z), \beta^s(z), \ldots$, $\alpha^l(z), \beta^l(z), \ldots$ и $\tau(z)$ – пока неизвестные функции.

Будем считать $\tau(0) = 0$. В формулах многоточием обозначено более гладкое при $t = \tau(z)$, по сравнению с выписанным, слагаемое, а

$$x_+^n = \begin{cases} x^n, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Из (4) и (5) путем дифференцирования получим (для удобства зависимость от t и z опускаем)

$$U_t = \alpha^s \delta(t-\tau) + \beta^s \varepsilon(t-\tau) + \gamma^s (t-\tau)_+ + \ldots$$

$$U_{tt} = \alpha^s \delta'(t-\tau) + \beta^s \delta(t-\tau) + \gamma^s \varepsilon(t-\tau) + \ldots$$

$$U_z = (\alpha^s)' \varepsilon(t-\tau) + \alpha^s \delta(t-\tau)(-\tau') + (\beta^s)'(t-\tau)_+ +$$
$$+ \beta^s \varepsilon(t-\tau)(-\tau)' + \gamma^s (t-\tau)_+ \tau' + \ldots$$

$$(\mu U_z)_z = (\mu(\alpha^s)')'\varepsilon(t-\tau) - \tau'\mu(\alpha^s)'\delta(t-\tau) - (\tau'\mu\alpha^s)'\delta(t-\tau) +$$

$$+(\tau')^2 \mu\alpha^s \delta'(t-\tau) + (\mu(\beta^s)')'(t-\tau)_+ - \tau'\mu(\beta^s)'\varepsilon(t-\tau) -$$

$$-(\tau'\mu\beta^s)'\varepsilon(t-\tau) + (\tau')^2 \mu\beta^s \delta(t-\tau) + (\tau')^2 \mu\gamma^s \varepsilon(t-\tau) + \ldots$$

$$V_t = \alpha^l \delta(t-\tau) + \beta^l \varepsilon(t-\tau) + \gamma^l (t-\tau)_+ + \ldots$$

$$V_{tt} = \alpha^l \delta'(t-\tau) + \beta^l \delta(t-\tau) + \gamma^l \varepsilon(t-\tau) + \ldots$$

Подставляя эти разложения в уравнения (1), (2) и приравнивая коэффициенты при $\delta'(t-\tau)$, $\delta(t-\tau)$ и $\varepsilon(t-\tau)$, получим

$$\delta'(t-\tau): \quad \begin{cases} \rho_s \alpha^s = (\tau')^2 \mu\alpha^s & (6) \\ \rho_l \alpha^l = 0 & (7) \end{cases}$$

$$\delta(t-\tau): \begin{cases} \rho_s \beta^s = (\tau')^2 \mu\beta^s - (\tau'\mu\alpha^s)' - \tau'\mu(\alpha^s)' - \chi\rho_l^2(\alpha^s - \alpha^l) & (8) \\ \rho_l \beta^l = \chi\rho_l^2(\alpha^s - \alpha^l) & (9) \end{cases}$$

$$\varepsilon(t-\tau): \begin{cases} \rho_s \gamma^s = (\mu\alpha^{s'})' - \mu\beta^{s'}\tau' - (\tau'\mu\beta^s)' - \chi\rho_l^2(\beta^s - \beta^l) + (\tau')^2\mu\gamma^s & (10) \\ \rho_l \gamma^l = \chi\rho_l^2(\beta^s - \beta^l) & (11) \end{cases}$$

Граничное условие (3) запишется в виде

$$-\tau'(0)\mu(0)\alpha^s(0)\delta(t) + \left(\mu(\alpha^s)'\Big|_{z=0} - \tau'(0)\mu(0)\beta^s(0)\right)\varepsilon(t) + \ldots =$$
$$= \delta(t) + f(0)\varepsilon(t) + \ldots$$

Отсюда

$$\tau'(0)\mu(0)\alpha^s(0) = -1, \ \mu(\alpha^s)'\Big|_{z=0} - \tau'(0)\mu(0)\beta^s(0) = f(0)$$

или

$$\alpha^s(0) = -1/\sqrt{\rho_s(0)\mu(0)}, \qquad (12)$$

$$\beta^s(0) = \frac{\mu(\alpha^s)'\Big|_{z=0} - f(0)}{\tau'(0)\mu(0)}. \qquad (13)$$

Далее получим уравнение Эйконала для $\tau(z)$ и решим его:

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{c_t(\xi)}, \qquad (14)$$

где $c_t(z) = \sqrt{\mu(z)/\rho_s(z)}$ есть скорость распространения поперечных волн в упруго-пористой среде.

Из уравнения (7) получим $\alpha^l(z) = 0$. Теперь из уравнения (8) получим

$$(\mu\alpha^s\tau')' + \mu(\alpha^s)'\tau' + \chi\rho_l^2\alpha^s = 0.$$

Учитывая (14), приведем это уравнение к виду

$$(\sigma\alpha^s)' + \sigma(\alpha^s)' + \chi\rho_l^2\alpha^s = 0, \qquad (15)$$

где

$$\sigma = \sigma(z) = \sqrt{\mu(z)\rho_s(z)}. \qquad (16)$$

Уравнение (15) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно неизвестной функции $\sqrt{\sigma}\alpha^s$:

$$2\sqrt{\sigma}\left(\sqrt{\sigma}\alpha^s\right)' + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\chi\rho_l^2\sqrt{\sigma}\alpha^s = 0,$$

решение, которого легко выписывается в квадратурах

$$\sqrt{\sigma(z)}\alpha^s(z) = c_1 \exp\left(-\int_0^z \frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)} d\xi\right) \ (c_1 - \text{const}).$$

Учитывая начальное условие (12), найдем постоянную c_1: $c_1 = -\frac{1}{\sigma(0)}$.

Таким образом,

$$\alpha^s(z) = -\frac{1}{\sqrt{\sigma(z)\sigma(0)}} \exp\left(-\int_0^z \frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)} d\xi\right) \qquad (17)$$

По известной функции $\alpha^s(z)$ из (9) находим $\beta^l(z)$:

$$\beta^l(z) = \chi(z)\rho_l(z)\alpha^s(z). \qquad (18)$$

Из уравнения (8) получим уравнение для определения $\beta^s(z)$:

$$(\mu(\alpha^s)'_z)'_z - (\mu\beta^s\tau'_z)'_z - \mu(\beta^s)'_z\tau'_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(\beta^s(z) - \beta^l(z)) = 0,$$

которое представим в виде

$$2\sqrt{\sigma}\left(\sqrt{\sigma}\beta^s\right)' + \frac{\chi\rho_l^2}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{\sigma}\beta^s = g,$$

где $g = g(z) = (\mu(\alpha^s)')' + \chi\rho_l^2\beta^l$ известная функция от z: она определяется формулами (16) и (18) . Решая это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, находим

$$\beta^s(z) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(z)}}\exp\left(-\int_0^z \frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)}d\xi\right)\times$$

$$\times\left(c_2 + \int_0^z \frac{g(\eta)}{2\sqrt{\sigma(\eta)}}\exp(\int_0^\eta \frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)}d\xi)d\eta\right). \qquad (19)$$

Используя начальное условие (13), а также формулы (14), (16), определим постоянную c_2:

$$c_2 = \frac{\sigma'(0) + \chi(0)\rho_l^2(0)}{2\rho_s(0)\mu(0)}. \qquad (20)$$

Подставляя (20) в (19) , найдем $\beta^s(z)$.

Таким образом, мы определили однозначно неизвестные функции $\tau(z), \alpha^l(z),\ \alpha^s(z), \beta^l(z), \beta^s(z)$.

Можно получить сколько угодно членов разложения волновых полей $U(t,z)$ и $V(t,z)$, точнее столько, сколько допускает гладкость коэффициента $\sigma(z)$.

При исчезновении пористости парциальные плотности ρ_s и ρ_l стремятся к ρ_s^f и 0 соответственно [1, 2]. Здесь ρ_s^f – плотность упругой среды. Поэтому, устремляя пористость ρ_l к нулю в (17), (19) получим известные формулы, приведенные в [3] для коэффициентов разложения волнового поля для упругой среды.

Заключение

Таким образом, получили сингулярное решение для одномерного уравнения поперечных волн для упруго-пористой среды с учетом потери энергии на межкомпонентное трение.

Библиографический список

1. Imomnazarov, Kh. Kh. Combined One Dimensional Inverse Problems for Maxwell's equations and an Equations of the Continual Filtration Theory / Kh. Kh. Imomnazarov // Appl. Math. Lett. – 1999. – Vol. 12, № 2. – P. 45–49.

2. Доровский, В. Н. Континуальная теория фильтрации / В. Н. Доровский // Геология и геофизика. – 1989. – № 7. – С. 39–45.

3. Белишев, М. И. Динамические обратные задачи теории волн / М. И. Белишев, А. С. Благовещинский. – СПб. : Изд-во СПб. ун-та, 1999. – 268 с.

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ[1]

Ш. Х. Имомназаров, М. М. Маматкулов*

Институт вычислительной математики
и математической геофизики Сибирского отделения РАН,
г. Новосибирск, Россия;
*Национальный Университет Узбекистана
им. Мирзо Улугбека,
г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: imom@omzg.sscc.ru

При описании процессов в физике, геофизике, биологии, химии и в ряде других наук используются нелинейные математические модели, основу которых составляют нелинейные системы дифференциальных уравнений в частных производных. Детальное изучение нелинейных математических моделей, как правило, проводится с помощью вычислительных экспериментов, однако поиск возможных аналитических решений также является важным этапом исследования. Это объясняется тем, что при численном моделировании задач возможно появлении ошибок, которые могут быть устранены при сравнении результатов с аналитическими решениями. Аналитическое изучение нелинейных моделей часто используется при анализе устойчивости разностных схем, по которым проводятся расчеты. Кроме того, найденные аналитические решения математических моделей чрезвычайно полезны и сами по себе, поскольку в ряде случаев их знание упрощает понимание изучаемых физических процессов и позволяет оценить роль тех или иных параметров решаемой задачи.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке НИР № 0315-2019-0005 и РФФИ (грант 18-51-41002).

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений несжимаемой двухскоростной гидродинамики с одним давлением в диссипативном приближении [1-5]:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\quad \operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\overline{\rho}}+\nu\Delta\mathbf{v}+\frac{\rho_s}{2\overline{\rho}}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u}=-\frac{\nabla p}{\overline{\rho}}+\tilde{\nu}\Delta\mathbf{u}-\frac{\rho_l}{2\overline{\rho}}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2, \tag{3}$$

Исследуем для системы уравнений (1)–(3) в цилиндрической области $\Omega=[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,L]$ следующую начально-краевую задачу со следующими начальными

$$\mathbf{v}\big|_{t=0}=\mathbf{v}_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{u}\big|_{t=0}=\mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}=(r,\varphi,z), \tag{4}$$

граничными условиями

$$v_z(r,\varphi,0)=0,\ v_r(0,\varphi,z)=v_r(R,\varphi,z)=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left(v_z(r,\varphi,L)-L\frac{\partial v_z}{\partial z}(r,\varphi,0)\right)d\varphi dr+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{L}R(L-z)\frac{\partial v_z}{\partial r}(R,\varphi,z)d\varphi dz=h(t), \tag{5}$$

$$u_z(r,\varphi,0)=0,\ u_r(0,\varphi,z)=u_r(R,\varphi,z)=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left(u_z(r,\varphi,L)-L\frac{\partial u_z}{\partial z}(r,\varphi,0)\right)d\varphi dr+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{L}R(L-z)\frac{\partial u_z}{\partial r}(R,\varphi,z)d\varphi dz=\tilde{h}(t), \tag{6}$$

где $\tilde{h}(t)$, $\tilde{h}(t)$ – заданные непрерывные функции.

Выберем пробную функцию

$$\tilde{\mathbf{u}}=(0,0,L-z),\ z\in[0,L]. \tag{7}$$

В силу граничных условий (5), (6) из класса $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\in \mathrm{C}^1((0,T);C^2(\overline{\Omega}))$ ($\mathbf{C}^2(\overline{\Omega})=C^2(\overline{\Omega})\times C^2(\overline{\Omega})\times C^2(\overline{\Omega})$) имеют место следующие соотношения:

$$\int_\Omega \Delta \mathbf{v}\tilde{\mathbf{u}}dx = \int_\Omega \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right](L-z)rdrd\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^L r\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big|_0^R (L-z)d\varphi dz + \int_0^R\int_0^L \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\Big|_0^{2\pi} (L-z)drdz +$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^R \left((L-z)\frac{\partial v_z}{\partial z}+v_z\right)\Big|_0^R d\varphi dr = \int_0^{2\pi}\int_0^L R\frac{\partial v_z}{\partial r}(R,\varphi,z,t)(L-z)d\varphi dz +$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^R \left(v_z(r,\varphi,L,t)-L\frac{\partial v_z}{\partial z}(r,\varphi,0,t)\right)d\varphi dr, \qquad (8)$$

$$\int_\Omega (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}\tilde{\mathbf{u}}dx = \int_\Omega \left[v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\varphi\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right](L-z)rdrd\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^L rv_r v_z\Big|_0^R (L-z)d\varphi dz + \int_0^R\int_0^L v_\varphi v_z\Big|_0^{2\pi}(L-z)drdz +$$

$$+\int_\Omega \left[v_z\frac{\partial v_z}{\partial r}-\frac{v_z}{r}\left(\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right)\right](L-z)rdrd\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R rv_z^2(L-z)\Big|_0^L drd\varphi + \int_\Omega v_z^2 rdrd\varphi dz = \int_\Omega v_z^2 rdrd\varphi dz. \qquad (9)$$

Здесь мы воспользовались условием соленоидальности поля и

$$\int_\Omega \nabla p\tilde{\mathbf{u}}dx = \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial z}(L-z)dx = \int_\Omega pdx + \int_0^{2\pi}\int_0^R rp(L-z)\Big|_0^L drd\varphi \geq$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^R rLp(r,\varphi,0,t)drd\varphi \equiv g(t). \qquad (10)$$

Умножим обе части уравнения (2) на ρ_l, уравнения (3) на ρ_s и в результате, с учетом множителя Лагранжа получим уравнение для импульса

$$\frac{\partial(\rho_l\mathbf{v}+\rho_s\mathbf{u})}{\partial t}+\rho_l(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}+\rho_s(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p+\rho\nabla P+\Delta(\rho_l\nu\mathbf{v}+\rho_s\tilde{\nu}\mathbf{u}). \qquad (11)$$

Обозначим через $P = p+\frac{\rho_s}{2}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2$. В терминах уравнения (2) примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla P}{\overline{\rho}}+\nu\Delta\mathbf{v}. \qquad (12)$$

Умножая обе части уравнений (11) и (12) на пробную функцию и используя соотношения (8)-(10), можно получить равенства

$$\frac{d\left(\rho J+\tilde{\rho}\tilde{J}\right)}{dt}=\rho\int\limits_{\Omega}v_z^2dx+\tilde{\rho}\int\limits_{\Omega}\tilde{v}_z^2dx+f_1(t),\ J=\int\limits_{\Omega}(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})dx, \qquad (13)$$

$$\frac{dJ}{dt}=\int\limits_{\Omega}v_z^2dx+f_2(t),\ \tilde{J}=\int\limits_{\Omega}(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{u})dx, \qquad (14)$$

$$f_1(t)=g(t)+\rho\nu h(t)+\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{h}(t),\ f_2(t)=-\frac{1}{\hat{\rho}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}rLP(r,\varphi,0,t)drd\varphi+\tilde{\nu}\tilde{h}(t).$$

Далее, доказанную в [6] для $\lambda\in(0,3)$ оценку

$$\frac{(3-\lambda)^2}{L^{(6-\lambda)}}J^2\le 2\int\limits_{\Omega}v_z^2dx.$$

Можно получить из (12), (13) систему дифференциальных неравенств

$$\frac{dJ}{dt}\ge k^2J^2+f(t),\ \frac{d\tilde{J}}{dt}\ge k^2\tilde{J}^2+f_2(t),$$

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t)/\rho,\ k^2=\frac{(3-\lambda)^2}{L^{(6-\lambda)}}.$$

Таким образом, в соответствии с работами [7] мы установили справедливость следующей теоремы.

Теорема. Классическое решение задачи (1)-(6) не существует глобально при выполнении следующих условий:

1) пусть $f(t),f_2(t)\ge 0$, тогда при условиях $J(0),\tilde{J}(0)>0$ справедливы оценки снизу

$$J(t)\ge\frac{J(0)}{1-J(0)k^2t},\ J(0)=\int\limits_{\Omega}(\mathbf{v}_0,\mathbf{u})dx,$$

$$\tilde{J}(t)\ge\frac{\tilde{J}(0)}{1-\tilde{J}(0)k^2t},\ \tilde{J}(0)=\int\limits_{\Omega}(\tilde{\mathbf{v}}_0,\mathbf{u})dx,$$

при этом имеет место оценка на время разрушения

$$T_\infty\le\frac{1}{k^2}\min\left(\frac{1}{J(0)},\frac{1}{\tilde{J}(0)}\right);$$

2) пусть $f(t) \geq a^2 > 0, f_2(t) \geq \tilde{a}^2 > 0$, тогда

$$J(t) \geq \frac{a}{k} tg(akt + c_0), \quad c_0 = arctg\left(\frac{kJ(0)}{a}\right),$$

$$\tilde{J}(t) \geq \frac{\tilde{a}}{k} tg(\tilde{a}kt + \tilde{c}_0), \quad \tilde{c}_0 = arctg\left(\frac{k\tilde{J}(0)}{\tilde{a}}\right),$$

оценка на время разрушения

$$T_\infty \leq \frac{1}{k} \min\left(\frac{\pi/2 - c_0}{a}, \frac{\pi/2 - \tilde{c}_0}{\tilde{a}}\right);$$

3) пусть $f(t) \geq -a^2, f_2(t) \geq -\tilde{a}^2$, тогда при условиях $kJ(0) > |a|$, $k\tilde{J}(0) > |\tilde{a}|$ справедливы оценки снизу

$$J(t) \geq \frac{a}{k} \frac{1 + c_0 e^{2akt}}{1 - c_0 e^{2akt}}, \quad c_0 = \frac{kJ(0) - a}{kJ(0) + a},$$

$$\tilde{J}(t) \geq \frac{\tilde{a}}{k} \frac{1 + \tilde{c}_0 e^{2\tilde{a}kt}}{1 - \tilde{c}_0 e^{2\tilde{a}kt}}, \quad c_0 = \frac{k\tilde{J}(0) - \tilde{a}}{k\tilde{J}(0) + \tilde{a}},$$

и оценка на время разрушения

$$T_\infty \leq \frac{1}{2k} \min\left(\frac{1}{a} \ln\left(\frac{kJ(0) + a}{kJ(0) - a}\right), \frac{1}{\tilde{a}} \ln\left(\frac{k\tilde{J}(0) + \tilde{a}}{k\tilde{J}(0) - \tilde{a}}\right)\right).$$

Заключение

Рассмотрена начально-краевая задача для систем вязких двухжидкостных сред с равновесием фаз по давлению. С помощью метода пробных функций, предложенного в работах Похожаева и Митидиери, исследуется влияние граничных и начальных условий на появление, время и скорость разрушения решений этих задач.

Библиографический список

1. Доровский, В. Н. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями / В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко // Прикладная механика и техническая физика. – 1992. – № 3. – С. 94–105.

2. Доровский, В. Н. Теория частичного плавления / В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко // Геология и геофизика. – 1989. – № 9. – С. 56–64.

3. Solving the problem of two viscous incompressible fluid media in the case of constant phase saturations / Zh. Baishemirov, Tang Jian-Gang, Kh. Imomnazarov, M. Mamatqulov // Open Eng. – 2016. – Vol. 6. – P. 742–745.

4. Imomnazarov, Kh. Kh. The fundamental solution of the stationary two-velocity hydrodynamics equation with one pressure / Kh. Kh. Imomnazarov,

Sh. Kh. Imomnazarov, M. M. Mamatqulov, E. G. Chernykh // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics. – 2014. – № 17. – P. 5–12.

5. Imomnazarov, Kh. Kh. Three-dimensional vortex flows of incompressible two-velocity media at constant saturation of substances / Kh. Kh. Imomnazarov, P. V. Korobov, N. M. Zhabborov // Bull. Nov. Comp. Center, series: Num. Model. in Atmosph. etc. – 2014. – № 14. – P. 17–25.

6. Юшков, Е. В. О разрушении решений уравнений гидродинамического типа при специальных граничных условиях / Е. В. Юшков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1234–1239.

7. Imomnazarov, Kh. Kh. Non-existence of the global solution of initial boundary value problem for the incompressible two-velocity medium equation / Kh. Kh. Imomnazarov, Sh. Kh. Imomnazarov, M. M. Mamatqulov // Bull. Nov. Comp. Center, series: Num. Model. in Atmosph. etc. – 2017. – № 16. – P. 17–25.

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БЕННИ – ЛЮКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

Мегралиев Яшар Топуш оглу[*], Велиева Вахар Камал кызы[**]

[*]Бакинский государственный университет,
г. Баку, Азербайджан;
[**]Гянджинский государственный университет,
г. Гянджа, Азербайджан
E-mail: yashar_aze@mail.ru; bahar.veliyeva.91@inbox.ru

Под обратной задачей для уравнений с частными производными в настоящей работе подразумевается такая задача, в которой вместе с решением требуется определить правую часть или (и) тот или иной коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связано с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, хотя известно среднее значение искомых величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моде-

лировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2], процессом влагопереноса в капиллярно – пористых средах [3], вопросами демографии и математической биологии.

Рассмотрим для уравнения [4]

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)+\alpha u_{xxxx}(x,t)-\beta u_{xxtt}(x,t)=$$
$$=a(t)u(x,t)+b(t)g(x,t)+f(x,t),\ \ (x,t)\in D_T, \qquad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1,0\le t\le T\}$, обратную краевую задачу с нелокальными начальными условиями

$$u(x,0)=\int_0^T p(t)u(x,t)dt+\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\ \ (0\le x\le 1), \qquad (2)$$

граничными условиями

$$u_x(0,t)=0,u_x(1,t)=0,u_{xxxx}(0,t)=0\ \ (0\le t\le T), \qquad (3)$$

интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0\ \ (0\le t\le T) \qquad (4)$$

и с дополнительными условиями

$$u(0,t)=h_1(t)\ \ (0\le t\le T), \qquad (5)$$

$$u(1,t)=h_2(t)\ \ (0\le t\le T), \qquad (6)$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, – фиксированные числа, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $p(t)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$, $h_i(t)(i=1,2)$ – заданные функции, а $u(x,t),a(t),b(t)$ – искомые функции

Введем обозначения

$$\tilde{C}^{4,2}(D_T)=\Big\{u(x,t):u(x,t)\in C^2(D_T),u_{ttx}(x,t),$$
$$u_{ttxx}(x,t),u_{xxx}(x,t),u_{xxxx}(x,t)\in C(D_T)\Big\}.$$

Определение. Под классическим решением обратной краевой задачи (1)–(6) понимаем тройку $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ функций $u(x,t)\in\tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$, $b(t)\in C[0,T]$ удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)-(6) в обычном смысле.

Наряду с обратной краевой задачей (1)- (6) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу:

Требуется определить тройку $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ функций $u(x,t)\in\tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$, $b(t)\in C[0,T]$, из соотношений (1)–(3) ,

$$u_{xxx}(1,t)=0\ (0\le t\le T), \tag{7}$$

$$h_1''(t)-u_{xx}(0,t)+\alpha u_{xxxx}(0,t)-\beta u_{xxtt}(0,t)=$$
$$=a(t)h_1(t)+b(t)g(0,t)+f(0,t)\ \ (0\le t\le T), \tag{8}$$

$$h_2''(t)-u_{xx}(1,t)+\alpha u_{xxxx}(1,t)-\beta u_{xxtt}(1,t)=$$
$$=a(t)h_2(t)+b(t)g(1,t)+f(1,t)\ \ (0\le t\le T), \tag{9}$$

где

$$h(t)\equiv h_1(t)g(1,t)-h_2(t)g(0,t)\neq 0\ \ (0\le t\le T)\ .$$

Справедлива следующая

Лемма **1.** *Пусть* $\phi(x),\ \psi(x)\in C[0,1], p(t)\in C[0,T],\quad h_i(t)\in C^2[0,T]$ $(i=1,2),\quad f(x,t),\quad g(x,t)\in C(D_T),\quad h(t)\equiv h_1(t)g(1,t)-h_2(t)g(0,t)\neq 0$ $\int_0^1 f(x,t)dx=0,\ \int_0^1 g(x,t)dx=0\ \ (0\le t\le T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1\phi(x)dx=0,\ \ \int_0^1\psi(x)dx=0,$$

$$\phi(0)=h_1(0)-\int_0^T p(t)h_1(t)dt,\ \ \psi(0)=h_1'(0),$$

$$\phi(1)=h_2(0)-\int_0^T p(t)h_2(t)dt,\ \ \psi(1)=h_2'(0).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

А. Каждое классическое решение $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *задачи (1)-(6) является и решением задачи (1)-(3), (7)- (9);*

Б. Каждое решение $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *задачи (1)-(3), (7)-(9), такое, что*

$$\left(\|p(t)\|_{C[0,T]}+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)T<1$$

является классическим решением (1)-(5).

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (7)- (9) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\alpha>0$, $\beta>0$, $p(t)\in C[0,T]$.

2. $\phi(x)\in C^4[0,1], \phi^{(5)}(x)\in L_2(0,1), \phi'(0)=\phi'(1)=\phi'''(0)=\phi'''(1)=0.$

3. $\psi(x)\in C^3[0,1], \psi^{(4)}(x)\in L_2(0,1), \psi'(0)=\psi'(1)=\psi'''(0)=\psi'''(1)=0.$

4. $f(x,t), f_x(x,t)\in C(D_T), f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T), \quad f_x(0,t)=f_x(1,t)=0$ $(0\le t\le T)$.

5. $g(x,t), g_x(x,t)\in C(D_T), g_{xx}(x,t)\in L_2(D_T), \quad g_x(0,t)=g_x(1,t)=0$ $(0\le t\le T)$.

6. $h_i(t)\in C^2[0,T](i=1,2), \quad h(t)\equiv h_1(t)g(1,t)-h_2(t)g(0,t)\neq 0$ $(0\le t\le T)$.

Можно доказать следующую теорему

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1-6. Тогда при малых значениях T задача (1)–(3), (7)–(9) имеет единственное решение.*

С помощью леммы 1, из последней теоремы немедленно вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)- (6).

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1,*

$$\int_0^1 f(x,t)dx=0,\ \int_0^1 g(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T)$$

и выполняются условия согласования

$$\int_0^1 \phi(x)dx=0,\ \int_0^1 \psi(x)dx=0, \phi(0)=h_1(0)-\int_0^T p(t)h_1(t)dt,\ \ \psi(0)=h_1'(0),$$

$$\phi(1)=h_2(0)-\int_0^T p(t)h_2(t)dt,\ \ \psi(1)=h_2'(0).$$

Тогда при малых значениях T задача (1)-(6) имеет единственное классическое решение.

Библиографический список

1. Самарский, А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А. А. Самарский // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

2. Ионкин, Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н. И. Ионкин // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

3. Нахушев, А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А. М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.

4. Benney, D. J. On the intera tions of permanent waves of nite amplitude / D. J. Benney, J. C. Luke // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 43. – P. 309–313.

О ПРИМЕНЕНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

И. С. Захарушкина, Е. В. Грозная

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: irina.zakharushkina@yandex.com;
kedrel@mail.ru

Введение

Целью настоящей работы является изучение вопроса применения спектральных методов к решению интегральных уравнений с достаточно гладкими данными. В основе этих методов лежит представление функций совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций. Если $p(i,t)_{i=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система функций, образующая базис пространства $L_2(T)$ (базисная система), то функция $x(t) \in L_2(T)$ может быть представлена в виде ряда

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(i,t)$$

на множестве T, где коэффициенты разложения x_i вычисляются по следующему правилу

$$x_i = \int_T p(i,t)x(t)dt, \quad i = 0,1,2,\ldots. \tag{1}$$

Упорядоченная совокупность коэффициентов разложения x_i, представленная в виде бесконечной матрицы-столбца, называется спектральной характеристикой функции $x(t)$, а отображение, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику, называется спектральным преобразованием и обозначается через S

$$X = S[x(t)], \; X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{2}$$

Обратный переход от спектральной характеристики к исходной функции осуществляется с помощью обратного спектрального преобразования

$$x(t) = S^{-1}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(i,t), \quad t \in T. \tag{3}$$

Применение к уравнениям Вольтерра II рода

Рассмотрим классические интегральные уравнения Вольтерра второго рода:

$$y(t) + \int_0^t R(t,s) y(s) ds = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где функция $f(t)$ и функция ядра $R(t,s)$ считаются заданными, а $y(t)$ – неизвестная функция, подлежащая определению.

Для применения спектрального подхода к аппроксимации решения уравнения (4) необходимо сделать следующее преобразование, переводящее (4) в эквивалентное уравнение, определенное на отрезке $[-1,1]$. Замена переменных $t = \frac{T(1+x)}{2}, x = \frac{2t-T}{T}$ позволяет переписать уравнение (4) следующим образом:

$$u(x) + \int_0^{T(1+x)/2} K\left(\frac{T(1+x)}{2}, s\right) u(s) ds = g(x) \tag{5}$$

где $g(x) = f(\frac{T}{2}(1+x)), u(x) = y(\frac{T}{2}(1+x)), \quad x \in [-1,1]$.

Теперь используем линейное преобразование $s = \frac{T(1+\tau)}{2}$, $\tau \in [-1,x]$ для перевода интервала $[0,T(1+x)/2]$ в интервал $[-1,x]$.

Тогда уравнение (5) примет вид:

$$u(x) + \int_{-1}^{x} K(x,\tau) u(\tau) d\tau = g(x), \quad x \in [-1,1], \tag{6}$$

где $K(x,\tau) = \frac{T}{2} R\left(\frac{T}{2}(1+x), \frac{T}{2}(1+\tau)\right)$.

Метод коллокации Чебышева

Для построения численного метода решения уравнения (6) выберем $(N+1)$ – коллокационную точку $\{x_i\}_{i=0}^{N}$. За основу будем брать точки Гаусса, Гаусса – Радау или точки Гаусса – Лобатто [1].

Запишем уравнение (6) в каждой из этих точек:

$$u(x_i) + \int_{-1}^{x_i} K(x_i, s)u(s)ds = g(x_i), \quad 0 \le i \le N \tag{7}$$

Для вычисления интеграла используем формулу интегрирования Гаусса

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \cong \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\omega_i.$$

Интервал интегрирования переведем в интервал $[-1,1]$, используя следующее линейное преобразование

$$s = s(x,\theta) = \frac{1+x}{2}\theta + \frac{x-1}{2}, \quad -1 \le \theta \le 1. \tag{8}$$

Тогда система (7) может быть приближенно записана следующим образом

$$u(x_i) + \frac{1+x_i}{2}\int_{-1}^{1} K\left(x_i, s(x_i,\theta)\right)u\left(s(x_i,\theta)\right)\sqrt{1-\theta^2}\,\omega(\theta)d\theta = g(x_i),$$

где $0 \le i \le N$, а $\omega(\theta)$ означает весовую функцию Чебышева.

Теперь используя квадратурную формулу Гаусса по этим точкам, получаем:

$$u(x_i) + \frac{1+x_i}{2}\sum_{j=0}^{N} K\left(x_i, s(x_i,\theta_j)\right)u\left(s(x_i,\theta_j)\right)\sqrt{1-\theta_j^2}\,\omega_j = g(x_i), \tag{9}$$

где $0 \le i \le N$, а множество $\{\theta_j\}_{j=0}^{N}$ совпадает с точками коллокации $\{x_j\}_{j=0}^{N}$.

Обозначим для краткости $u_i = u(s(x_i,\theta_j))$, тогда разложение u по многочленам Чебышева примет вид

$$u(\sigma) \approx \sum_{j=0}^{N} u_j F_j(\sigma), \tag{10}$$

где F_j – базисные функции Чебышева

$$F_j(s) = \sum_{p=0}^{N} a_{p,j} T_p(s),$$

$$a_{p,j} = \frac{1}{\gamma_p}\sum_{i=0}^{N} T_p(x_i)F_j(x_i)\omega_i = \frac{T_p(x_j)\omega_j}{\gamma_p}, \quad p = 0,1,2,...$$

и

$$\gamma_p = \frac{\pi}{2}C_p, \quad \forall p < N, \quad C_p = \begin{cases} 2, p = 0 \\ 1, p \geq 1 \end{cases}.$$

$$\gamma_N = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{для формул Гаусса и Гаусса – Радау} \\ \pi & \text{для формулы Гаусса – Лобатто} \end{cases}$$

Объединение (9) и (10) дает

$$u_i + \frac{1+x_i}{2}\sum_{j=0}^{N} u_j \left(\sum_{p=0}^{N} K\left(x_i, s(x_i,\theta_p)\right) \times \right.$$

$$\left. \times F_j\left(s(x_i,\theta_p)\right)\sqrt{1-\theta_p^2}\,\omega_p \right) = g(x_i), \quad 0 \leq i \leq N. \qquad (11)$$

Решая вышеуказанную систему, получаем коэффициенты разложения $\{u_i\}_{i=0}^{N}$.

Метод коллокации по узлам Лежандра

Рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ уравнение (6).

В качестве точек коллокации снова выберем $(N+1)$-точку Гаусса, Гаусса – Радау или Гаусса – Лобатто $\{x_i\}_{i=0}^{N}$. Потребуем чтобы уравнение (6) обращалось в равенство в точках x_i:

$$u(x_i) + \int_{-1}^{x_i} K(x_i,s)u(s)ds = g(x_i), \quad 0 \leq i \leq N. \qquad (12)$$

Основная трудность в получении высокого порядка точности состоит в том, чтобы вычислить интегральный член в (12). В частности, для малых значений x_i имеется недостаточно информации о функции $u(s)$. Для преодоления этой трудности преобразуем интервал $[-1,x_i]$ в фиксированный интервал $[-1,1]$, а затем используем некоторую подходящую квадратурную формулу. А конкретно, сначала выполняем простое линейное преобразование:

$$s(x,\theta) = \frac{1+x}{2}\theta + \frac{x-1}{2}, \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

Тогда (12) примет вид

$$u(x_i) + \int_{-1}^{1} \tilde{K}(x_i, s(x_i, \theta)) u(s(x_i, \theta)) d\theta = g(x_i), \quad 0 \le i \le N, \tag{13}$$

где

$$\tilde{K}(x_i, s(x_i, \theta)) = \frac{1 + x_i}{2} K(x_i, s(x_i, \theta)). \tag{14}$$

Использование квадратурной формулы Гаусса по $(N+1)-$точке относительно весов Лежандра $\{\omega_k\}$ дает

$$u(x_i) + \sum_{j=0}^{N} \tilde{K}(x_i, s(x_i, \theta_j)) u(s(x_i, \theta_j)) \omega_j = g(x_i), \quad 0 \le i \le N, \tag{15}$$

где множество $\{\theta_j\}_{j=0}^{N}$ совпадает с точками коллокации $\{x_j\}_{j=0}^{N}$.

Теперь нужно представить $u(s(x_i, \theta_j))$, используя u_i, $0 \le i \le N$, то есть значения во всех точках сетки. Для этого продолжим u, используя интерполяционные полиномы Лагранжа, т.е.

$$u(\sigma) \approx \sum_{j=0}^{N} u_j F_j(\sigma),$$

где F_j – это j-я базисная функция Лагранжа. Объединение приведенного выше уравнения и (15) дает

$$u_i + \sum_{j=0}^{N} u_j \left(\sum_{j=0}^{N} \tilde{K}(x_i, s(x_i, \theta_j)) F_j(s(x_i, \theta_j)) \omega_j \right) = g(x_i), \quad 0 \le i \le N. \tag{16}$$

Реализация алгоритма спектральной коллокации

Обозначая $U_N = [u_0, u_1, ..., u_N]^T$ и $g_N = [g(x_0), g(x_1), ..., g(x_N)]^T$, можно получить уравнение в матричной форме:

$$U_N + AU_N = F_N, \tag{17}$$

где элементы матрицы A определяются как

$$A_{i,j} = \sum_{p=0}^{N} \tilde{K}(x_i, s(x_i, \theta_p)) F_j(s(x_i, \theta_p) \omega_p.$$

Обсудим теперь эффективное вычисление $F_j(s(x_i, \theta_p)$ [2]. Идея состоит в том, чтобы выразить $F_j(s)$ через функции Лежандра:

$$F_j(s) = \sum_{p=0}^{N} \alpha_{p,j} L_p(s), \tag{18}$$

где $\alpha_{p,j}$ называются дискретными полиномиальными коэффициентами F_j. Обратное соотношение [3]:

$$\alpha_{p,j} = \frac{1}{\gamma_p} \sum_{i=o}^{N} F_j(x_i) L_p(x_i) \omega_i = L_p(x_j) / \gamma_p, \tag{19}$$

где

$$\gamma_p = \sum_{i=o}^{N} L_p^2(x_i) \omega_i = (p + \frac{1}{2})^{-1}, \quad \text{для} \quad p < N$$

и $\gamma_N = (N + 1/2)^{-1}$ для формул Гаусса и Гаусса–Радау, и $\gamma_N = 2/N$ для формулы Гаусса – Лобатто. Из (18) и (19) следует, что

$$F_j(s) = \sum_{p=0}^{N} L_p(x_i) L_p(s) / \gamma_p,$$

которые вместе с известными рекуррентными формулами для $L_p(s)$ могут быть использованы для оценки $F_j(s(x_i, \theta_p))$ эффективным способом.

Нелинейные уравнения

На практике многие уравнения Вольтерра являются нелинейными. Тем не менее, методы, описанные выше, остаются применимыми. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим уравнения Вольтерра второго рода следующего вида:

$$u(x) + \int_{-1}^{x} k(x, s, u(s)) ds = g(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Подобно линейному случаю, предполагаем, что уравнение выполняется в точках коллокации Лежандра, а также преобразуем интервал $[-1, x]$ в $[-1, 1]$. Это дает

$$u(x_i) + \frac{1 + x_i}{2} \int_{-1}^{1} k(x_i, s(x_i, \theta)), u(s(x_i, \theta)) d\theta = g(x_i), \quad 0 \le i \le N.$$

Аналогично (16) получаем

$$u_i + \frac{1 + x_i}{2} \sum_{j=0}^{N} k\left(x_i, s(x_i, \theta_j), \sum_{j=0}^{N} u_j F_j(s(x_i \theta_j)) \right) \omega_j = g(x_i), \quad 0 \le i \le N. \tag{20}$$

Система (20) может быть затем решена некоторыми методами, подходящими для решения нелинейных систем.

Двумерный случай

Рассмотрим уравнения Вольтерра второго рода на плоскости:

$$u(x,y)+\int_a^x\int_a^y k(x,y,s,t,u(s,t))dsdt = g(x,y), \quad (x,y)\in[a,b]^2.$$

Пусть приведенное выше уравнение выполняется в точках Лежандра (x_i, y_j), а затем с использованием линейного преобразования и приемов, использованных в одномерном случае, получаем

$$u_{i,j}+\frac{1+x_i}{2}\frac{1+x_j}{2}\sum_{p=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}k(x_i,y_j,s(x_i,\theta_p),s(x_i,\theta_l),$$

$$u(s(x_i,\theta_p),s(x_i,\theta_l)))\omega_p\omega_l = g(x_i,y_j).$$

Значения $u(s(x_i,\theta_p),s(x_i,\theta_l))$ также можно аппроксимировать с помощью $u_{i,j}$ с использованием соотношения между интерполяционными полиномами Лагранжа, связанными с точками коллокации Лежандра, как показано в одномерном случае.

Проведенные вычислительные эксперименты для некоторых классов интегральных уравнений Вольтерра показывают эффективность численных методов спектрального типа.

Библиографический список

1. Ghanei, F. Numerical Solution of Volterra Integral Equations Using the Chebyshev-Collocation Spectral Methods / F. Ghanei, A. S. Shamloo // International Journal of Science and Engineering Investigations – 2012. – Т. 1, № 6. – С. 33–37.

2. Tang, T. On spectral methods for Volterra type integral equations and the convergence analysis / T. Tang, X. Xu, J. Cheng // Journal of Computational Mathematics – 2008. – Т. 26, № 6. – С. 825–837.

3. Spectral Methods Fundamentals in Single Domains / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. – Berlin-Heidelber : Springer–Verlag, 2006.

4. Бойков, И. В. Параметрическая идентификация линейных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2014. – № 7. – С. 13–23.

5. Бойков, И. В. Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 2 (30). – С. 34–48.

АЛГОРИТМЫ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

М. А. Коротченко, А. В. Бурмистров[*]

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия;
[**]Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск, Россия
E-mail: kmaria@osmf.sscc.ru; burm@osmf.sscc.ru

В работе рассмотрено кинетическое уравнение Смолуховского с коэффициентами коагуляции, которые линейно зависят от размера взаимодействующих частиц и, кроме того, являются случайными процессами. Рассматривается задача численной оценки вероятностных моментов линейных функционалов от решения исходного уравнения с помощью статистического моделирования. Путем перехода к интегральному уравнению второго рода и моделирования эволюции системы частиц согласно соответствующей цепи Маркова с использованием метода двойной рандомизации, в работе были построены новые алгоритмы метода Монте-Карло. Данный подход был впервые применен в газовой динамике и в дальнейшем использовался авторами во многих кинетических моделях (подробнее см. [1]), в том числе и для решения уравнения Смолуховского [2, 3]. Построенные алгоритмы возможно применять для решения уравнения Смолуховского со случайными параметрами общего вида.

Рассматриваемое нелинейное уравнение Смолуховского описывает широкий класс процессов коагуляции (слипания) в ряде физических систем, которые состоят из частиц с целочисленными размерами. Мы ограничимся рассмотрением именно целочисленного случая, поэтому в уравнениях присутствуют суммы вместо интегралов, при этом для удобства некоторые суммы заменяются интегралами по дискретной мере. Придерживаясь обозначений работы [3] в пространственно-однородном случае, уравнение Смолуховского для концентрации $u_k(t)$ частиц размера k в момент времени t можно записать следующим образом:

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0315-2019-0002), а также при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, номера проектов 17-01-00698, 18-01-00356 и 18-01-00599).

$$\frac{\partial u_k(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{l+m=k} K_{lm}u_l(t)u_m(t) - \sum_{l\geq 1} K_{kl}u_k(t)u_l(t), u_k(0) = u_{0k}, k > 0.$$

Здесь K_{kl} – заданные коэффициенты коагуляции, при этом для достаточно малого промежутка времени Δt величина $K_{kl}\Delta t$ равна вероятности взаимодействия частиц размера k и l (назовем их k-мерами и l-мерами, соответственно) в течение этого интервала Δt. Для оценки линейных функционалов от решения уравнения Смолуховского мы будем моделировать эволюцию многочастичной системы с помощью однородной цепи Маркова (см., например, [4]), переходы в которой происходят в результате парных взаимодействий частиц в системе (т.е. в результате слипания двух частиц с образованием одной частицы большего размера).

Далее, будем также придерживаться следующих обозначений из [3]:

- N_0 и N – начальное (без ограничения общности считаем $t_0 = 0$) и текущее число мультимеров, моделируемых в системе ($N_0 \geq N$);
- целочисленный вектор $W = (N, l_1, \cdots l_N)$, однозначно описывающий текущее состояние моделируемой системы;
- вероятность $P(W,t)$ описывает распределение состояния системы в текущий момент времени t;
- $\pi = (i, j)$ – номера мультимеров (а именно l_i-мера и l_j-мера), которые взаимодействуют в данный момент времени;
- расширенный вектор $M = (W, \pi)$, который однозначно описывает текущее состояние моделируемой системы в модифицированном фазовом пространстве.

По аналогии с работой [5], в работе авторов [2] было получено специальное интегральное уравнение второго рода $F = \boldsymbol{K}F + F_0$ для функции $F(M,t)$ – плотности распределения взаимодействий, в модифицированном фазовом пространстве $\mathcal{M}\times[0,t]$, а именно:

$$F(M,t) = \int_0^t \int_{\mathcal{M}} F(M',t')K(M',t' \to M,t)\mathrm{d}M'\mathrm{d}t' + F_0(M,t).$$

Ядро K последнего уравнения представляет собой произведение плотностей перехода, то есть содержит дельта-функции только в качестве сомножителей. Это обстоятельство, а также наличие связанного с этим уравнением марковского процесса, позволяет использовать хорошо развитый аппарат весового [6, 7] и ценностного [8, 9] статистического моделирования.

Заметим, что при моделировании марковского процесса переход из текущего состояния (M',t') в состояние (M,t) выполняется в следующей последовательности, в соответствии со структурой полученного ядра K (см., например, [3]):

1. моделируем время свободного пробега системы τ по обобщенной экспоненциальной плотности, в этом случае $t = t' + \tau$;

2. случайным образом выбераем номер $\pi = (i, j)$ пары частиц, которые будут участвовать в следующем парном взаимодействии;

3. преобразуем систему взаимодействующих частиц, а именно: заменяем частицы с номерами i и j одним l-мером размера $l = l_i + l_j$. Таким образом, в результате взаимодействия количество частиц системы уменьшается на одну: $N = N' - 1$.

Численная оценка функционалов

Обычно для некоторого набора весовых функций $H_{\mu}(W), \mu \in \mathrm{M}$ и фиксированного момента T требуется численно оценить линейные функционалы от $P(W,T)$ следующего вида

$$G_{H_\mu}(T) = \int_{\mathbf{W}} H_{\mu}(W) P(W,T) \mathrm{d}W.$$

Возможно показать, что функционалы указанного вида можно представить в следующей форме:

$$G_{H_\mu}(T) = \int_{\mathcal{M}} \int_{0}^{T} \tilde{H}_\mu\left(W, T - t'\right) F\left(M, t'\right) \mathrm{d}M \, \mathrm{d}t', \tilde{H}_\mu(W,s) = \exp\left\{-\mathrm{C}(W)s\right\},$$

где $F(M,t)$ – решение интегрального уравнения (см., например, [5]).

Далее будем использовать одно из следующих эквивалентных обозначений: $G_{H_\mu}(T) = G_\mu(T) = G_\mu$ при описании функционалов, не указывая конец временного интервала T и также символ весовой функции H в тех случаях, когда значения этих параметров очевидны из предыдущих рассуждений. Например, символами G_1 и G_λ обозначены концентрация мономеров и полная концентрация мультимеров в системе, соответственно. При этом весовые функции имеют вид $H_1 = \dfrac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N} \delta(l_i - 1)$ и $H_\lambda = \dfrac{N}{N_0}$. Кроме того, напомним, что все функционалы зависят от T, H, а также от коэффициентов коагуляции.

Постановка задачи

Для линейных коэффициентов коагуляции вида $K_{lm} = \alpha + \beta \dfrac{(l+m)}{2}$ со случайными параметрами (α, β) рассмотрим задачу оценки математического ожидания функционалов $G_\mu(\alpha,\beta)$ и $G_\mu(\alpha,\beta) G_\nu(\alpha,\beta)$ с весо-

выми функциями H_μ и $H_\nu, \mu, \nu \in \mathrm{M}$: $G_\mu = \boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} G_\mu(\alpha,\beta)$ и $\mathrm{P}_{\mu\nu} = \boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}[G_\mu(\alpha,\beta) G_\nu(\alpha,\beta)]$.

Принцип построения новых алгоритмов решения задач коагуляции были предложены авторами ранее [10] в рамках подхода решения задач со случайными параметрами для кинетических задач [11, 12].

Весовые алгоритмы

Для приближенного вычисления величины $G_\mu(\alpha,\beta)$ в случае постоянных значений параметров (α,β) можно использовать как оценку по столкновениям $\xi = \sum_{n=0}^{z} Q_n \tilde{H}_\mu(\mathrm{W}_n, T - t_n)$ [3], так и оценку по поглощениям $\eta = q^{-1}(\mathrm{W}_z, t_z) Q_z \tilde{H}_\mu(\mathrm{W}_z, T - t_z)$ [2], где функция $q(\mathrm{W},t)$ – вероятность обрыва траектории, который происходит при пересечении временно́го отрезка $[0,T]$. Эти оценки являются случайными функционалами от траекторий моделируемых цепей Маркова $\{M_n, t_n\}$, $n = 0,1...,z$, где z – номер последнего взаимодействия, непосредственно предшествующего выходу системы за временну́ю границу T. При этом могут использоваться вспомогательные плотности перехода вместо физических плотностей, являющимися сомножителями в ядре K. Данная замена плотностей учитывается с помощью мультипликативных весов $Q_n, n = 0,1...,z$. При выполнении ряда условий выполняются равенства $G_\mu(\alpha,\beta) = \boldsymbol{E}\,\xi = \boldsymbol{E}\,\eta$ и дисперсии оценок ограничены (см. [5, 2]).

Метод двойной рандомизации

Для решения поставленной задачи со случайными параметрами (α,β) можно использовать так называемый метод «двойной рандомизации» (см., например, [6]), который строится на основе следующих равенств:

$$\boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} G_{\boldsymbol{\mu}}(\alpha,\beta) = \boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega}} \eta_\mu(\alpha,\beta,\omega) = \boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\omega})} \eta_\mu(\alpha,\beta,\omega);$$

$$\boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}[G_{\boldsymbol{\mu}}(\alpha,\beta) G_{\boldsymbol{\nu}}(\alpha,\beta)] = \boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2)}[\eta_\mu(\alpha,\beta,\omega_1)\eta_\nu(\alpha,\beta,\omega_2)],$$

где ω_1 и ω_2 – условно-независимые траектории, которые моделируются для одной выборочной реализации (α,β), а индекс у математического ожидания $\boldsymbol{E}$ означает соответствующее распределение.

Последние равенства показывают, что для численной оценки функционалов G_μ и $\mathrm{P}_{\mu\nu}$ достаточно моделировать всего одну траекторию и две условно-независимые траектории для каждого фиксированно-

го набора (α,β), соответственно. При этом отметим, что для выполнения вышеприведенных равенств необходимо предполагать существование используемых в них математических ожиданий.

Метод расщепления с использованием весового моделирования

Для оптимизации описанного алгоритма моделирования целесообразно использовать метод однократного расщепления (см., например, [6]). Как для оценки ξ [3], так и для η [2] авторами были ранее построены весовые алгоритмы, которые дают возможность вычислять функционалы с множеством различных значений параметров (α,β), моделируя траектории марковской цепи всего для одного набора, например для $\boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}(\alpha,\beta)$. Количество значений пар параметров (α,β), используемых для моделирования на каждой траектории, возможно подбирать из условия минимизации трудоемкости с учетом увеличения времени моделирования и уменьшения дисперсии оценки (подробнее см., например, [6]).

При использовании численного моделирования в монодисперсном случае (при этом для $t=0$ имеем $l_i=1,i=1,\ldots,N$), авторами были полученыдостаточно хорошие результаты при оценке функционалов G_1, G_λ, $\mathrm{P}_{1\lambda}$ для независимых равномерно распределенных (α,β).

Библиографический список

1. Бурмистров, А. В. Использование кинетических моделей и моделирования многочастичных систем в некоторых областях науки / А. В. Бурмистров, М. А. Коротченко // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2019. – № 1. – URL: mathmod.esrae.ru/24-79

2. Бурмистров, А. В. Весовые алгоритмы метода Монте-Карло для оценки и параметрического анализа решения кинетического уравнения коагуляции / А. В. Бурмистров, М. А. Коротченко // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2014. – Т. 17, № 2. – С. 125–138.

3. Бурмистров, А. В. Использование оценки по столкновениям при решении уравнения Смолуховского методом Монте-Карло / А. В. Бурмистров, М. А. Коротченко // Марчуковские научные чтения – 2017 : тр. Междунар. науч. конф. – Новосибирск, 2017. – С. 126–132.

4. Лушников, А. А. Некоторые новые аспекты теории коагуляции / А. А. Лушников // Известия Академии наук СССР. Физ. атмосферы и океана. – 1978. – Т. 14, № 10. – С. 1046–1054.

5. Михайлов, Г. А. Весовые методы Монте-Карло для приближенного решения уравнения Больцмана / Г. А. Михайлов, С. В. Рогазинский // Сибирский математический журнал. – 2002. – Т. 43, № 3. – С. 620–628.

6. Михайлов, Г. А. Численное статистическое моделирование (Метод Монте-Карло) / Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. – Москва : Академия, 2006. – 368 с.

7. Korotchenko, M. A. Value modifications of weighted statistical modelling for solving nonlinear kinetic equations / M. A. Korotchenko, G. A. Mikhailov, S. V. Rogazinskii // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2007. – Vol. 22, № 5. – P. 471–486.

8. Коротченко, М. А. Статистические алгоритмы ценностного моделирования для решения уравнения Смолуховского / М. А. Коротченко // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № S4. – С. 68–74.

9. Korotchenko, M. Value Monte Carlo Algorithms for Estimating the Solution to the Coagulation Equation / M. Korotchenko // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2012. – Vol. 23. – P. 511–522.

10. Бурмистров, А. В. Алгоритмы статистического моделирования для решения кинетического уравнения коагуляции со случайными параметрами / А. В. Бурмистров, М. А. Коротченко // Марчуковские научные чтения – 2018 : тезисы Междунар. конф. «Вычислительная математика и математическая геофизика», посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. А. С. Алексеева. – Новосибирск, 2018. – С. 26–27.

11. Бурмистров, А. В. Моделирование автотранспортного потока в кинетической модели со случайными параметрами / А. В. Бурмистров, М. А. Коротченко // Тезисы XIX Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. – Новосибирск, 2018. – С.12–13.

12. Бурмистров, А. В. Определение коэффициентов в стохастической дифференциальной модели формирования цены / А. В. Бурмистров, А. В. Новиков // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер.: Естественные и технические науки. – 2018. – № 3. – С. 39–44.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ К НАХОЖДЕНИЮ ВСЕХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Шалдаева, Н. Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: nastyashaldaeva@mail.ru; math.kudryashova@yandex.ru

Введение

Нелинейные уравнения представляют большой интерес в силу многочисленных приложений в математической физике, механике и других областях науки. Причем уравнения могут быть алгебраическими, трансцендентными, дифференциальными, интегральными и т.д. Решением этих уравнений посвящены многочисленные работы.

В работе Ньютона [1] рассматривается уравнение $F(x,y)=0$, где переменные x и y могут быть как действительными, так и комплексными, для решения которого им была построена диаграмма, в настоящее время называемая диаграммой Ньютона. Развитие метода Ньютона и его роль представлены в работе Н. Г. Чеботарева [2].

В 1956 году М.А. Красносельский опубликовал работу [3], которая дала интенсивное развитие топологических и вариационных методов в теории ветвления.

В монографии М.М. Вайнберга, В.А. Треногина [4] освещены вопросы, касающиеся ветвления решений нелинейных уравнений, а также диаграммы Ньютона, одномерного и многомерного случаев ветвления, уравнений разветвлений Ляпунова-Шмидта и др.

Развитие асимптотических методов в многомерных случаях ветвления решений нелинейных уравнений представлено в работах Б.В. Логинова [5, 6], Н.И. Макаренко [7] и других.

Кроме того, некоторые результаты в теории итерационных методов, в том числе, построение разветвляющихся решений операторных уравнений, полученные к середине 80-х годов, отражены в монографии Н.А. Сидорова [8]. Также при исследовании уравнений итерационными методами вызывает интерес работа Н.А. Сидорова, В.А. Треногина [9].

При решении нелинейных уравнений в большинстве случаев бывает сложно построить их точные решения. Кроме того, приходится сталкиваться с ветвлением этих решений. Поэтому необходима разработка приближенных методов.

В данной работе на примере модельной задачи будут рассмотрены два метода решения нелинейных операторных уравнений, у которых производная в особой точке обращается в ноль. Найдем все решения с помощью диаграммы Ньютона, а также применим для решения уравнения непрерывный операторный метод.

Непрерывный операторный метод решения нелинейных уравнений

В работе И.В. Бойкова [10] был предложен непрерывный операторный метод решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах.

Введем следующие обозначения: $R(a,r)=\{z\in B:\| z-a\|\le r\}$, $\mathrm{S}(a,r)=\{z\in B:\| z-a\|= r\}$, $\Lambda(K)=\lim\limits_{h\downarrow 0}(\| I+hK\|-1)/h$, где B – банахово пространство, $a\in B$, $K-$ линейный оператор, действующий из B в B, $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма оператора K, I – тождественный оператор.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A(x)-f=0, \qquad (1)$$

где $A(x)$ – нелинейный оператор, действующий из банахова пространства X в X.

Задача Коши для уравнения (1) имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \tag{2}$$

$$x(0) = 0, \tag{3}$$

где нелинейный оператор A имеет непрерывную производную Гато.

Теорема 1 [10]. Пусть выполнены следующие условия:

1) В банаховом пространстве X существует шар $S = R(x^*, r)$, $r > 0$, в котором уравнение (1) имеет единственное решение x^*;

2) В каждой точки $x \in S$ существует производная Фреше (или Гато) $A'(x)$ оператора $A(x)$;

3) Для любых двух точек x_1 и x_2 шара S выполняется неравенство $\|A'(x_1) - A'(x_2)\| \le L$;

4) Для любого $x \in S$ справедливо неравенство $\Lambda(A'(x)) \le -\alpha$, $\alpha > 0$;

5) Справедливо неравенство $\alpha > L$.

Тогда решение задачи Коши (2)-(3) сходится к решению операторного уравнения (1) при любом $x_0 \in S$.

Теорема 2 [10]. Пусть уравнение (1) имеет непрерывное решение x^* и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $R(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

1) При любом t $(t > 0)$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau)))d\tau < 0;$$

2) Справедливо неравенство $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau)))d\tau < -\alpha,\ \alpha > 0.$

Тогда решение задачи Коши (2)-(3) сходится к решению x^* уравнения (1).

Модельная задача

Рассмотрим уравнение

$$z^3 + \frac{5}{2}z^2 + z + \lambda = 0, \tag{4}$$

где λ – некоторый параметр. Уравнение при $\lambda = 0$ имеет три корня: $z_1 = 0$, $z_2 = -1/2$, $z_3 = -2$.

К данному уравнению нельзя применить основной и модифицированный метод Ньютона-Канторовича, так как производная в точке начального приближения обращается в ноль.

Применим к уравнению (4) диаграмму Ньютона. Для этого запишем его в виде многочлена относительно ξ

$$F(\xi,\mu) \equiv \mu + \xi + \frac{5}{2}\xi^2 + \xi^3 \equiv F_0(\mu) + F_1(\mu)\xi + F_2(\mu)\xi^2 + F_3(\mu)\xi^3 = 0, \quad (5)$$

где $F_0(\mu) = \mu \quad (\rho_0 = 1)$, $F_1(\mu) = 1 \quad (\rho_1 = 0)$, $F_2(\mu) = \frac{5}{2} \quad (\rho_2 = 0)$, $F_3(\mu) = 1$ $(\rho_3 = 0)$.

Решение будет представлено в виде ряда

$$\xi = \xi_\varepsilon \mu^\varepsilon + \xi_{\varepsilon'} \mu^{\varepsilon'} + \xi_{\varepsilon''} \mu^{\varepsilon''} + \ldots = \xi_\varepsilon \mu^\varepsilon + o(\mu^\varepsilon), \text{ при } \mu \to 0. \quad (6)$$

где $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots$, $\xi_\varepsilon \neq 0$.

Для нахождения возможных значений ε и ξ, собираем члены с одинаковыми степенями μ и приравниваем их к нулю. Тем самым получаем точки $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$. Диаграмма Ньютона, построенная по полученным точкам, представлена на рис. 1.

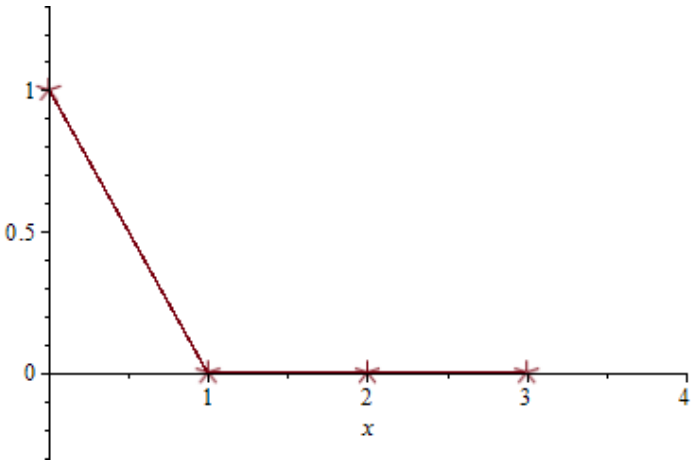


Рис. 1. Диаграмма Ньютона для определения первых коэффициентов

Первый отрезок диаграммы $(0,1)$, $(1,0)$, тогда получаем $\varepsilon = 1$, соответственно $\xi_1 = -1$. Для второго отрезка: $(1,0)$, $(3,0)$ – $\varepsilon = 0$, которому соответствуют два корня $\xi_0 = 0$, $\xi_0 = -\frac{1}{2}$. Тем самым, получаем следующие решения: $\xi = 0$, $\xi = -\frac{1}{2}$, $\xi = -\mu + o(\mu)$.

Так как первые два решения получились точные, для последнего продолжаем построение диаграммы Ньютона. Подставляем в многочлен

(5) корень $\xi = -\mu + V$, тогда получаем $F_0(\mu) = \frac{5}{2}\mu^2$ $(\rho_0 = 2)$, $F_1(\mu) = 1$ $(\rho_1 = 0)$, $F_2(\mu) = \frac{5}{2}$ $(\rho_2 = 0)$, $F_3(\mu) = 1$ $(\rho_3 = 0)$.

Диаграмма Ньютона, построенная по точкам $(0,2)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, представлена на рис. 2.

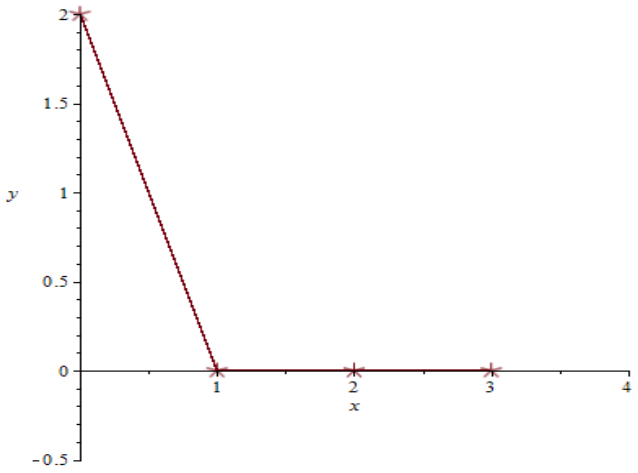


Рис. 2. Диаграмма Ньютона для определения вторых коэффициентов

Для первого отрезка на рис. 2: $\varepsilon' = 2$, соответственно $V_2 = -2$. Для второго – $\varepsilon = 0$, которое не удовлетворяют условию $\varepsilon' > \varepsilon$. Тогда получаем решение $\xi = -\mu - 2\mu^2 + o(\mu^2)$.

В работе А. И. Маркушевича [11] , было установлено, что никаких других решений, кроме тех, которые были получены с помощью диаграммы Ньютона, нет. Значит в результате решения исходного уравнения (4) с помощью диаграммы Ньютона, получаем три корня: $\xi = 0$, $\xi = -\frac{1}{2}$, $\xi = -\mu - 2\mu^2 - 7\mu^3 + o(\mu^3)$.

Построим непрерывный метод решения уравнения (4). Для этого рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$f(x) \equiv -\lambda - x(t) - \frac{5}{2}x^2(t) - x^3(t) = 0\,?$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda - x(t) - \frac{5}{2}x^2(t) - x^3(t), \qquad (7)$$

$$x(0) = 0. \qquad (8)$$

Для решения задачи Коши (7)-(8) воспользуемся методом Эйлера

$$x_{n+1} = x_n + h(-\lambda - x_n - \frac{5}{2}x_n^2 - x_n^3),\ n = \overline{0,N},$$

где h – шаг вычислительной сетки, N – число итераций, а за начальное приближение возьмем $x_0 = -\dfrac{-5-\sqrt{13}}{6}$.

Результаты решения при фиксированных значениях $h = 0{,}0001$, $N = 50000$ и различных значениях параметра λ представлены на рис. 3, где по оси абсцисс отмечены значения λ, по оси ординат – приближенное решение уравнения.

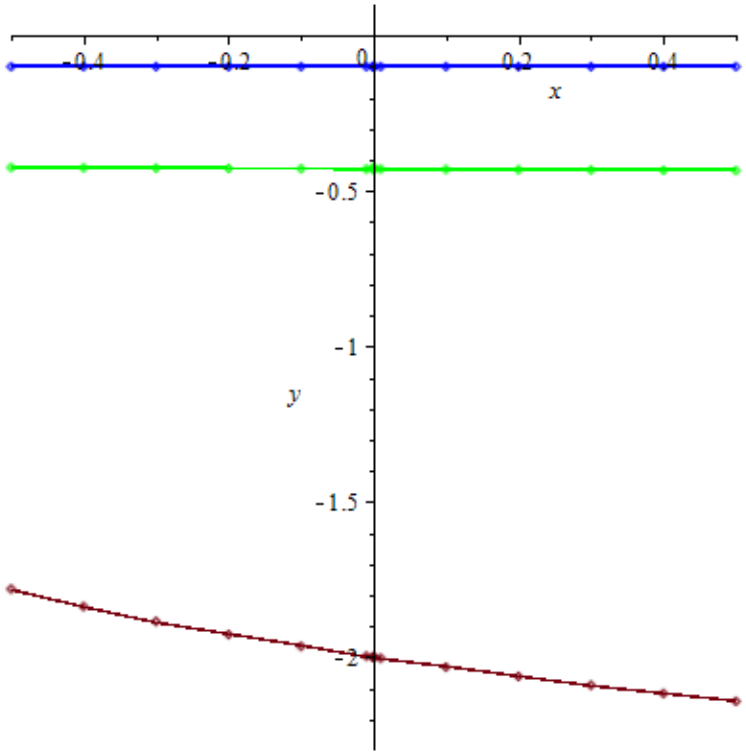


Рис. 3. Непрерывное решение уравнения (4)

Из анализа рис. 3 следует, что непрерывный метод позволил получить три корня, причем один из корней имеет ветвление в зависимости от параметра λ.

Выводы

Тем самым, для нелинейного уравнения (4) найдены все решения с помощью диаграммы Ньютона, а также построен непрерывный метод решения операторного уравнения. Предложенный метод допускает распространение на более общие алгебраические уравнения.

Библиографический список

1. Ньютон, И. Математические работы. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением и геометрии кривых / И. Ньютон. – Москва ; Ленинград : ОНТИ, 1937. – 478 с.

2. Чеботарев, Н. Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики / Н. Г. Чеботарев // Исаак Ньютон: 1643-1727 : сб. ст. к

трехсотлетию со дня рождения / Акад. наук СССР ; под ред. акад. С. И. Вавилова. – Москва ; Л. : Изд-во АН СССР, 1943.

3. Красносельский, М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М. А. Красносельский. – Москва : Гостехиздат, 1956. – 392 с.

4. Вайнберг, М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.

5. Логинов, Б. В. Групповая симметрия уравнений разветвления Ляпунова – Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации / Б. В. Логинов, Н. А. Сидоров // Математический сборник. – 1991. – Т. 182, № 5. С. 681–691.

6. Логинов, Б. В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия / Б. В. Логинов // Вестник Самарского государственного университета. – 1998. – № 4 (10). – С. 15–70.

7. Макаренко, Н. И. О неединственности сопряженных течений / Н. И. Макаренко // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 68–74.

8. Сидоров, Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н. А. Сидоров. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 1982. – 312 с.

9. Сидоров, Н. А. Точки бифуркации нелинейных уравнений / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / под ред. В. А. Треногина, А. Ф. Филиппова. – Москва : Физматлит, 2003. – С. 5–49.

10. Бойков, И.В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.

11. Маркушевич, А. И. Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. – Москва : Наука, 1966.

МЕТОДЫ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В. В. Кормишина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: lera.2695@bk.ru

Введение

Для сложных явлений, в которых определяющие величины меняются во времени и в пространстве, установить зависимость между переменными не всегда возможно. Задача моделирования таких процессов является актуальной. В этом случае, для моделирования может быть ис-

пользован общий подход, основанный на представлении модели в виде «вход-выход». В этом случае задача моделирования при заданном воздействии сводится к определению импульсной переходной функции процесса, методы определения которой можно найти в работах [1, 2].

В работе рассмотрена задача моделирования тепловых процессов, математическая модель которых описывается дифференциальным уравнением в частных производных.

Моделирование основано на применении граничных интегральных уравнений (ГИУ) для представления математической модели в виде «вход-выход», где в качестве импульсной переходной функции выступает функция Грина дифференциального уравнения в частных производных.

Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных, которое определяет двумерные линейные и изотропные процессы теплопроводности (диффузии)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

Для моделирования теплового процесса требуется определить функцию $u(x,y,t)$, где время $t\ge 0$ в двумерной области R (на плоскости Oxy), с учетом начальных и граничных условий:

$$u(x,y,0)=f(x,y) \text{ для } (x,y)\in R, \tag{2}$$

$$u(x,y,t)=g(x,y,t) \text{ для } (x,y)\in C_1 \text{ и } t\ge 0, \tag{3}$$

$$u(x,y,t)=h(x,y)z(t) \text{ для } (x,y)\in C_2 \text{ и } t\ge 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}[u(x,y,t)]=k(x,y,t) \text{ для } (x,y)\in C_3 \text{ и } t\ge 0, \tag{5}$$

и нелокального (интегрального) условия:

$$\iint_S u(x,y,t)\,dxdy=m(t) \text{ для } t\ge 0. \tag{6}$$

где f, g, h, k и m известные функции, z является неизвестной функцией, подлежащей определению, область R ограничена простой замкнутой кривой C, кривые C_1, C_2, C_3 не пересекаются, так что $C_1\cup C_2\cup C_3=C$, S – заданная подобласть R, которая не зависит от времени t и ограничена простой замкнутой кривой D, представляемой как $D=C_2\cup C_4$, открытая кривая C_4 полностью лежит внутри R, а также $\frac{\partial u}{\partial n}=n\cdot\nabla u$, где n – единичный вектор нормали на C, отдаляющийся от R.

Решение задачи

Применяя преобразование Лапласа к (1)–(6) задача сводится к решению следующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-pU=-f(x,y) \tag{8}$$

относительно $U(x,y;p)$ при условиях:

$$U(x,y;p)=G(x,y,p) \text{ для } (x,y)\in C_1, \tag{9}$$

$$U(x,y;p)=h(x,y)\Phi(p) \text{ для } (x,y)\in C_2, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}[U(x,y;p)]=K(x,y;p) \text{ для } (x,y)\in C_3, \tag{11}$$

и

$$\iint\limits_s U(x,y;p)\,dxdy=M(p), \tag{12}$$

где $U(x,y;p)$, $G(x,y,p)$, $\Phi(p)$, $K(x,y;p)$ и $M(p)$ – преобразование Лапласа соответствующих функций.

Используя (8) и теорему дивергенции, уравнение (5) примет вид:

$$\int\limits_{C_2\cup C_4}\frac{\partial}{\partial n}[U(x,y;p)]ds=pM(p)-\iint\limits_S f(x,y)dxdy. \tag{13}$$

Выполним замену:

$$U(x,y;p)=U_{part}(x,y;p)+V(x,y;p), \tag{14}$$

где $U_{part}(x,y;p)$ – любое частное решение уравнения (8).

Согласно Аткинсону [3], частное решение (8) задается формулой:

$$U_{part}(x,y;p)=-\iint\limits_T f(\xi,\eta)\Gamma(x,y;\xi,\eta;p)d\xi d\eta, \tag{15}$$

где $\Gamma(x,y;\xi,\eta;p)$ – функция Грина для уравнения (8) (см. [4, 5]), и T – двумерная область.

Используя (14), (8) – (11) и (13) будут иметь вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-pV=0, \tag{16}$$

$$V(x,y;p)=G(x,y,p)-U_{part}(x,y;p) \text{ для } (x,y)\in C_1, \tag{17}$$

$$V(x,y;p)=h(x,y)\Phi(p)-U_{part}(x,y;p) \text{ для } (x,y)\in C_2, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[V\left(x,y;p\right)\right]=K\left(x,y;p\right)-\frac{\partial}{\partial n}[U_{part}(x,y;p)] \text{ для } \left(x,y\right)\in C_3\ , \quad (19)$$

$$\int\limits_{C_2\cup C_4}\frac{\partial}{\partial n}\left[V\left(x,y;p\right)\right]ds=pM\left(p\right)-$$

$$-\iint\limits_{S}f\left(x,y\right)dxdy-\int\limits_{C_2\cup C_4}\frac{\partial}{\partial n}\left[V\left(x,y;p\right)\right]ds\,, \quad (20)$$

Применяя стандартный метод ГИУ для областей S и R/S соответственно, и полагая, что $\left(\xi,\eta\right)$ – середина $C^{(N+i)}$, (i = 1, 2, …, J), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\frac{1}{2}V^{(N+i)}=\sum_{k=1}^{Q}\left\{V^{(k)}\int\limits_{C^{(k)}}\frac{\partial}{\partial n}\left[\Gamma\left(x,y;\xi^{(N+i)},\eta^{(N+i)};p\right)\right]ds-\right.$$

$$\left.-W^{(k)}\int\limits_{C^{(k)}}\Gamma\left(x,y;\xi^{(N+i)},\eta^{(N+i)};p\right)ds\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{J}\left\{V^{(N+k)}\int\limits_{C^{(N+k)}}\frac{\partial}{\partial n}\left[\Gamma\left(x,y;\xi^{(N+i)},\eta^{(N+i)};p\right)\right]ds-\right.$$

$$\left.-W^{(N+k)}\int\limits_{C^{(N+k)}}\Gamma\left(x,y;\xi^{(N+i)},\eta^{(N+i)};p\right)ds\right\},\ i=1,2,\ldots,J, \quad (21)$$

и

$$\frac{1}{2}V^{(N+i)}=\sum_{k=Q+1}^{N}\left\{V^{(k)}\int\limits_{C^{(k)}}\frac{\partial}{\partial n}\left[\Gamma\left(x,y;\xi^{(N+i)},\eta^{(N+i)};p\right)\right]ds-\right.$$

$$\left.-W^{(k)}\int\limits_{C^{(k)}}\Gamma\left(x,y;\xi^{(N+i)},\eta^{(N+i)};p\right)ds\right\}-$$

$$-\sum_{k=1}^{J}\left\{V^{(N+k)}\int\limits_{C^{(N+k)}}\frac{\partial}{\partial n}\left[\Gamma\left(x,y;\xi^{(N+i)},\eta^{(N+i)};p\right)\right]ds-\right.$$

$$\left.-W^{(N+k)}\int\limits_{C^{(N+k)}}\Gamma\left(x,y;\xi^{(N+i)},\eta^{(N+i)};p\right)ds\right\},\ i=1,2,\ldots,J, \quad (22)$$

где $V^{(N+i)}$ – аппроксимируемая постоянная величина $V(x,y)$ по $C^{(N+i)}$, и $(\xi^{(N+i)},\eta^{(N+i)})$ – середина $C^{(N+i)}$.

Таким образом, после применения граничных условий, СЛАУ решена для неизвестных $\Phi(p)$, $V^{(i)}$ и $W^{(i)}$ при i = 1, 2, …, Q, а также при $i = N + 1, N + 2,\ldots,N + J$, и $\mathrm{V}^{(\mathrm{i})}$, $\mathrm{W}^{(\mathrm{i})}$ при $i = Q + 1, Q + 2, \ldots, N$.

Искомые значения моделируемого процесса u определяются обратным преобразованием Лапласа для его изображения, которое определено из уравнения (17)–(20). В таблице 1 представлены результаты определения функции u при $t = 1/10$ в точках (x,y), лежащих внутри области решения. Полученные и точные значения хорошо согласуются между собой. Когда число элементов, используемых при вычислении, удвоены или утроены, наблюдается улучшение точности численных результатов.

Таблица 1

Численные результаты для $u(x,y,1/10)$
в определенных точках (x,y), лежащих внутри области решения

(x, y)	Приближенное решение	Точное решение
(0.50,0.50)	2.170	2.161
(0.30,0.80)	2.129	2.127
(0.20,0.30)	1.059	1.053
(0.70,0.10)	1.067	1.050
(0.10,0.10)	0.3745	0.3717
(0.90,0.80)	4.194	4.187

Заключение

В работе показано применения ГИУ при моделировании теплового процесса (1) при условиях (2)–(5). Метод решения задачи (1)–(5) может быть использован при построении других физических процессов и их управлении.

Библиографический список

1. Бойков, И. В. Определение динамических характеристик измерительных преобразователей с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. – 2000. – № 9. – С. 20–22.

2. Бойков, И. В. Методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Программные системы: теория и приложения. – 2014. – Т. 5, № 5 (23). – С. 79–96.

3. Atkinson, K. E. The numerical evaluation of particular solutions for Poisson's equation / K. E. Atkinson // IMA Journal of Numerical Analysis. – 1985. – № 5. – P. 319–338.

4. Бутковский, А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : справ. пособие / А. Г. Бутковский. – Москва : Наука, 1979. – 224 с.

5. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – Москва : Физматлит, 2001. – 576 с.

МЕТОДЫ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

О. В. Овчарев

Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия
E-mail: ow4arev@yandex.ru

Введение

Задача построения управляемых физических процессов является одной из актуальных технических задач. Данные задачи возникают при управлении протекания диффузионных, тепловых колебательных и других физических и технологических процессах. В общей постановке задача управления заключается в определении условий, параметров физических процессов так, чтобы наблюдаемый физический процесс был определенного вида. Как правило, физические процессы являются процессами с распределенными параметрами, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Данная работа посвящена построению управлению колебательным процессом. Применение данного метода управления основано на представлении математической модели в виде граничного интегрального уравнения - модели в вида «вход - выход». Построение такой модели по дифференциальному уравнению состоит в определении функции Грина. Обзор уравнений, которые имеют интегральное представление содержится в [1,2]. Следует отметить, функция Грина для динамических систем является импульсной переходной функцией, определение которой может проведено методами идентификации. Методы идентификации динамических систем с распределенными параметрами можно найти в работах [3-5] и в цитируемых в них источниках.

Постановка задачи

Рассмотрим колебательный процесс, описываемый уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2},\ 0 \le x \le l,\ t > 0 \qquad (1)$$

с начальными

$$Q(x,t) = f_0(x),\ \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t} = f_1(x) \qquad (2)$$

и краевыми условиями

$$Q(0,t) = u(t),\ Q(l,t) = 0. \qquad (3)$$

Требуется определить функцию $u(t)$ – управление так чтобы колебательный процесс имел форму $Q(x,t)$ при $0 \le x \le l$, $t > 0$.

В данной постановке задачи, управление $u(t)$ осуществляется за счет перемещения левого конца (при $x = 0$) струны ($u(t)$ – уравнение перемещения). В работе [6] рассмотрена задача граничного управления колебаниями струны, описываемые уравнением (1) при условиях (2), (3) с заданными состояниями в промежуточные моменты времени, где управление осуществляется на обоих концах струны.

О решении задачи

Для решения поставленной задачи, согласно [2,3], представим решение уравнения (1) с начальными (2) и краевыми (3) условиями в виде

$$Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l f_0(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi +$$

$$+\int_0^l f_1(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + a^2 \int_0^t u(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,\xi,t-\tau) \right]_{\xi=0} d\tau. \qquad (4)$$

где $G(x,\xi,t) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n a t}{l}\right)$ - функция Грина.

Тогда определение управления сводится к решению интегрального уравнения (4) относительно функции $u(t)$.

Приближенное представление функции $u(t)$ будем искать в виде

$$U(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \phi_k(t), \qquad (5)$$

где $\varphi_k(t)$ – система линейно независимых функций.

Подставляя (5) в (4), коэффициенты разложения (5) определим методом коллокаций из системы линейных алгебраических уравнений, составленных по узлам $t_k = \frac{l(2k+1)}{2N}$, $k = 0,1,...,N-1$:

$$\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \int_0^{t_k} \phi_j(\tau) \sum_{n=1}^{M} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n a (t_k - \tau)}{l}\right) d\tau = F(x,t_k), \quad k = 0,1,...,N, \qquad (6)$$

где

$$F(x,t) = \frac{1}{\pi l a^3} \left[\frac{\pi l a}{2} Q(x,t) - \pi \int_0^l f_0(\xi) \sum_{n=1}^{M} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n a t}{l}\right) d\xi - \right.$$

$$-l\int_0^l f_1(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n\xi}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi nat}{l}\right)\Bigg].$$

Численный пример

Рассмотрим задачу стабилизации колебательного процесса (1) - (3) на отрезке $[0,\pi]$ при начальных $Q(x,t) = 0{,}5sin(x/2)$, $f_0(x)$, $\frac{\partial Q(x,0)}{\partial t}=0$ и краевых условиях:

$$Q(0,t)=\begin{cases}\dfrac{3}{10\pi}t, & 0\le t\le\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{3}{10}-\dfrac{3}{10\pi}t, & \dfrac{\pi}{2}\le t\le\pi,\end{cases}\qquad Q(l,t)=0.$$

Приближенное представление функции управления будем искать в виде (5):

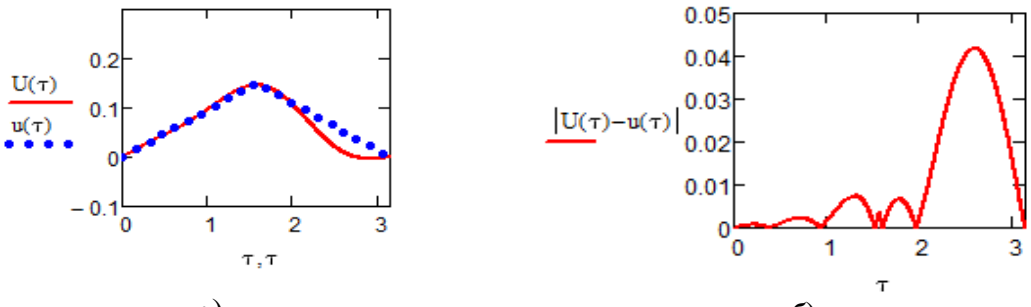
$$U(t)=\sum_{k=0}^{4}\alpha_k e^{-kt}.$$

Для определения коэффициентов α_k, k=0,1,2,3,4, на отрезке $[0,\pi]$, по узлам $t_k=\frac{\pi(2k+1)}{10}$, $k=0,1,...,4$, составим систему линейных уравнений (6), где положено M=7. Искомые коэффициенты α_k, k=0,1,2,3,4, найдем из полученной системы уравнений.

В результате, приближенное управление имеет вид:

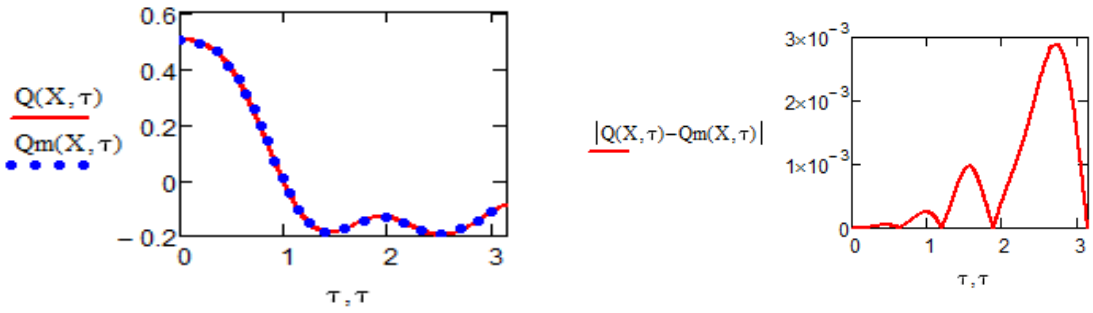
$$U(t)=0.014+0.015e^{-t}-0.03e^{-2t}+0.008e^{-3t}+0.02e^{-4t}.$$

Результаты, полученного управления при $x=\frac{3\pi}{4}$ приведены на рис. 1, 2.



а) ***б***)

Рис. 1. ***а*** – точное и полученное управления; ***б*** – погрешность управления (максимальная абсолютная погрешность составила менее 0.05)



а) ***б***)

Рисунок 2. ***а*** – требуемый и управляемый колебательные процессы при полученном управлении; ***б*** – погрешность стабилизации колебательного процесса (максимальная абсолютная погрешность составила менее 0.003)

Заключение

Предложенный метод управления колебательным процессом может быть применим и для других физических процессов с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

Также стоит отметить, что управление физическими процессами можно осуществить методами идентификации и методами параметрической идентификации [3-5] за счет параметров физических процессов или за счет определения конструктивных параметров измерительных преобразователей [7].

Библиографический список

1. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – Москва : Физматлит, 2001. – 576 с.

2. Бутковский, А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : справ. пособие / А. Г. Бутковский. – Москва : Наука, 1979. – 224 с.

3. Бойков, И. В. Методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Программные системы: теория и приложения. – 2014. – Т. 5, № 5 (23). – С. 79–96.

4. Кривулин, Н. П. Определение параметров физических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами / Н. П. Кривулин // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. VIII Междун. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов / под ред. И. В. Бойкова. – Пенза, 2014. – С. 172–178.

5. Бойков, И. В. Параметрическая идентификация линейных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2014. – № 7. – С. 13–23.

6. Барсегян, В. Р. О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени / В. Р. Барсегян // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и

прикладной механики : сб. тр. (Казань, 20-24 августа 2015 г.). – Казань : Изд-во Казан. (Приволжского) федер. ун-та, 2015. – С. 356–358.

7. Серебряков, Д. И. Расчет конструктивных параметров чувствительного элемента волоконно-оптического сигнализатора уровня жидкости / Д. И. Серебряков, Т. И. Мурашкина, Н. П. Кривулин // Авиакосмическое приборостроение. – 2006. – № 7. – С. 20–22.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. Ю. Алексеев, Н. Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: math.kudryashova@yandex.ru; alexeew_ilya@mail.ru

Введение

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), \tag{1}$$

где $(x,y)\in D$, $u(x,y)\big|_{(x,y)\in\Gamma}=\varphi(x,y)$, в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной замкнутой кривой Γ.

В данной работе для решения задачи (1) применяются разностные методы, а также метод сведения дифференциального уравнения к граничному интегральному уравнению.

1. Разностные методы

Для реализации данного метода необходимо построить равномерную сетку узлов. В качестве области $\overline{D}$ возьмём прямоугольник $a\le x\le b,\ c\le y\le d$. Тогда узлы определим по формулам:

$$x_m=a+mh;\ h=\frac{b-a}{M},\ m=\overline{0,M};$$

$$y_n=c+nl;\ l=\frac{d-c}{N},\ n=\overline{0,N},$$

где h и l – шаги по пространственным координатам.

Предположим, что на границах прямоугольной области искомая функция удовлетворяет условиям:

$$u(a,y)=\varphi_1(y),\ u(b,y)=\varphi_2(y),\ c\le y\le d;$$

$$u(x,c)=\varphi_3(x),\ u(x,d)=\varphi_4(x),\ a\le x\le b. \qquad (2)$$

Будем использовать пятиточечный шаблон типа «крест» (рис. 1). Введём сеточную функцию

$$u_{mn}=u(x_m,y_n),\ m=\overline{1,M-1},\ n=\overline{1,N-1}.$$

Проведём аппроксимацию дифференциальных операторов их разностными аналогами [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m,y_n)&=\frac{u_{m-1,n}-2u_{mn}+u_{m+1,n}}{h^2}+O(h^2);\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_m,y_n)&=\frac{u_{m,n+1}-2u_{mn}+u_{m,n-1}}{l^2}+O(l^2),\end{aligned} \qquad (3)$$

Построим неявную разностную схему:

$$\begin{gathered}\frac{u_{m-1,n}-2u_{mn}+u_{m+1,n}}{h^2}+\frac{u_{m,n+1}-2u_{mn}+u_{m,n-1}}{l^2}=f(x_m,y_n),\\ m=\overline{1,M-1},\ n=\overline{1,N-1},\\ u_{0n}=\varphi_1(y_n),\ u_{Mn}=\varphi_2(y_n),\ n=\overline{1,N-1};\\ u_{m0}=\varphi_3(x_m),\ u_{mN}=\varphi_4(x_m),\ m=\overline{0,M}.\end{gathered} \qquad (4)$$

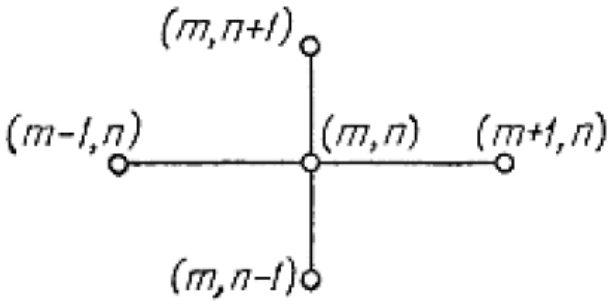


Рис. 1. Шаблон вида «крест»

Если к разностной схеме (4) применить метод Гаусса–Зейделя, то последовательность приближённых решений системы линейных алгебраических уравнений (4) будет определяться по следующим формулам:

$$\begin{aligned}u_{mn}^{(s+1)}=\frac{1}{2(h^2+l^2)}\Big[&\left(u_{m,n-1}^{(s+1)}+u_{m,n+1}^{(s)}\right)h^2+\\ &+\left(u_{m-1,n}^{(s+1)}+u_{m+1,n}^{(s)}\right)l^2-f(x_m,y_n)h^2l^2\Big],\end{aligned}$$

где в качестве начального приближения $u_{mn}^{(0)}$ можно взять любой вектор.

Теперь применим к разностной схеме (4) метод матричной прогонки. Для этого перепишем исходную разностную схему в виде:

$$u_{m+1,n} - 2u_{mn} + u_{m-1,n} + \alpha(u_{m,n+1} - 2u_{mn} + u_{m,n-1}) = h^2 f(x_m, y_n),$$

$$m = \overline{1, M-1},\ n = \overline{1, N-1};$$

$$u_{0n} = \varphi_1(y_n),\ u_{Mn} = \varphi_2(y_n),\ n = \overline{1, N-1};$$

$$u_{m0} = \varphi_3(x_m),\ u_{mN} = \varphi_4(x_m),\ m = \overline{0, M};\ \frac{h^2}{l^2} = \alpha > 0. \qquad (5)$$

Для краткости записи введём обозначение

$$u_m = \begin{bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ \dots \\ u_{m,N-1} \end{bmatrix},\ m = \overline{0, M}. \qquad (6)$$

В формулах (5) зададим $n = 1, 2, \dots, N-1$ и с помощью (6) запишем систему уравнений (5) в векторной форме:

$$\begin{aligned} &u_{i+1} + Au_i + u_{i-1} = f_i,\ i = \overline{1, M-1}; \\ &u_0 = f_0,\ u_M = f_a, \end{aligned} \qquad (7)$$

где A – трёхдиагональная матрица размера $(N-1)(N-1)$, имеющая вид:

$$A = \begin{bmatrix} -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2+2\alpha) \end{bmatrix},$$

$$f_i = \begin{bmatrix} h^2 f(x_i, y_1) - \alpha\varphi_3(x_i) \\ h^2 f(x_i, y_2) \\ \dots \\ h^2 f(x_i, y_{N-2}) \\ h^2 f(x_i, y_{N-1}) - \alpha\varphi_4(x_i) \end{bmatrix},\ f_0 = \begin{bmatrix} \varphi_1(y_1) \\ \varphi_1(y_2) \\ \dots \\ \varphi_1(y_{N-1}) \end{bmatrix},\ f_a = \begin{bmatrix} \varphi_2(y_1) \\ \varphi_2(y_2) \\ \dots \\ \varphi_2(y_{N-1}) \end{bmatrix}.$$

Теперь запишем алгоритм метода матричной прогонки в векторной форме [2].

1) Вычисляем матрицы $R_i = \left(R_{kl}^{(i)} \right)_1^{n-1}$, $i = \overline{1, M}$ по формулам

$$R_{i+1} = -\left(A + R_i\right)^{-1},\ i = \overline{1, M-1}.$$

При этом полагаем $R_1 = 0.$ Затем с помощью выражения $s_{i+1} = R_{i+1}(s_i - f_i),\ i = \overline{i, M-1},$ вычисляем векторы

$$s_i = \begin{pmatrix} s_1^{(i)} \\ s_2^{(i)} \\ \dots \\ s_{N-1}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

2) По следующей формуле вычисляем решения задачи (7) $u_M, u_{M-1}, \dots, u_1, u_0$ при $u_M = f_a.$

$$u_{i-1} = R_i u_i + s_i, \quad i = \overline{M, 1}.$$

Представленные выше вычисления описаны для случая, когда направление прогонки совпадает с направлением оси Ox.

2. Метод сведения к граничному интегральному уравнению

Пусть в некоторой области Ω нужно найти функцию u, удовлетворяющую уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{8}$$

при одном из заданных граничных условий:

$$u(x, y)\big|_{(x,y)\in\Gamma} = f(x, y) \tag{9}$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = g(x, y), \tag{10}$$

где Γ – граница области Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная по её внешней нормали.

В каждой точке границы может быть задана только одна из функций f или g.

Основное интегральное тождество для гармонических функций имеет вид [3]:

$$u(\rho) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} g(t)\frac{dl}{r(\rho, t)} - \int_{\Gamma} f(t)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r(\rho, t)}\right]dl, \tag{11}$$

где $r(\rho, t)$ – модуль расстояния между точками ρ, t.

Введём в рассмотрение предельный переход:

$$f(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[g(t)\frac{1}{r(P,t)}-f(t)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r(P,t)}\right]\right]dl, \qquad (12)$$

где $f(P)=\lim\limits_{\rho\to P} f(\rho)$.

Уравнение (12) является граничным интегральным уравнением. Его необходимо решить относительно неизвестной функции *f* при известной *g*, или решить относительно функции *g* при известной *f*. После этого по формуле (11) вычисляем значения функции *u* в каждой точке области Ω.

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1977. – 656 с.

2. Самарский, А. А. Численные методы : учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва : Наука, 1989. – 432 с.

3. Дербасова, В. А. Решение уравнений Лапласа методом граничных интегральных уравнений : учеб. пособие / В. А. Дербасова. – Москва : МАИ, 1985. – 40 с.

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

Ю. В. Ирышкова, Н. Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mai: 425699gfgf@mail.ru; math.kudryashova@yandex.ru

В данной работе рассматриваются физические процессы, которые представляют собой различные интерпретации задачи Стефана, т.е. задачи с границей перехода между одним состоянием и другим.

1. Процесс промерзания грунта

В данной задаче между промерзшей и талой зоной грунта находится граница фазового перехода. Положение межфазной границы с течением времени будет меняться [1].

Рассмотрим слой грунта глубиной *L* и влажностью *w*. Фаза 1 – промерзшая часть грунта $0\le x\le s(t)$, фаза 2 – талая часть грунта $s(t)\le x\le L$.

Введем теплофизические характеристики как для талой, так и для промерзшей зоны грунта: λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности (Вт/(м*К)), ρ_1, ρ_2 – плотности грунта $\left(\text{кг/м}^3\right)$, c_1, c_2 – удельные теплоемкости (Дж/(кг*К)), $Q_ф$ – теплота фазового перехода (Дж/кг), *s=f(t)* – глубина промерзшего слоя.

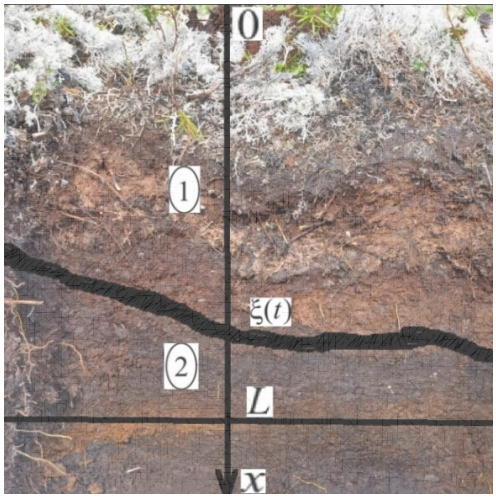


Рис. 1. Схема процесса теплообмена в грунте

Рассмотрим одномерную двухфазовую задачу Стефана с граничным условием второго рода на нижней границе [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 < x < \xi(t), t > 0; \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \xi(t) < x < L, t > 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$t = 0 : T(x) = T_0, 0 \le x \le L; x = 0 : T(t) = T_c, t > 0; x = L : \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t > 0; \quad (2)$$

$$x = \xi(t) : \begin{cases} T_1 = T_2 = T_Ф; \\ \lambda_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial x} = Q_ф \dfrac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \omega \dfrac{d\xi}{dt}; \end{cases} \quad (3)$$

Задача (1)–(3) в промерзшей части грунта будет аппроксимироваться разностной схемой вида

$$\frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^{n}}{\tau_{n+1}} = \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - 2T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j-1}^{n+1}}{h^2}, i = \overline{2, i*-1}; \quad T_1\big|_{i=1} = T_c; \; T_1\big|_{i=i^*} = T_з; \quad (4)$$

где $i = i*$ – граница фазового перехода.

Для получения приближенного решения исходной задачи в талой части грунта, воспользуемся следующей схемой

$$\frac{T_{2,j}^{n+1}-T_{2,j}^{n}}{\tau_{n+1}}=\frac{T_{2,j+1}^{n+1}-2T_{2,j}^{n+1}+T_{2,j-1}^{n+1}}{h^2},i=\overline{i^*+1,N-1};$$
$$T_2\big|_{i=i^*}=T_з;\ \left.\frac{\partial T_2}{\partial x}\right|_{i=N}=0. \tag{5}$$

Выражение для функции на границе области будет иметь вид

$$T_N^{n+1}=\frac{2a\tau T_{N-1}^{n+1}+h^2T_N^n}{2a\tau+h^2}. \tag{6}$$

2. Процесс сварки металлических пластин

Ось z направлена вдоль оси луча лазера. Ось x – вдоль стыка в направлении перемещения пластин, y – перпендикулярно стыку. Сами пластины перемещаются со скоростью v.

Процесс сварки можно описать уравнением

$$c_{ei}v\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda_i\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}\right); \tag{7}$$

$$c_{ei}=\begin{cases}c_1\rho_1, T<T_e,\\ c_2\rho_2\left(1+\dfrac{\chi}{c_2}\dfrac{\partial f_l}{\partial T}\right), T_e\le T\le T_{l0},\\ c_3\rho_3, T_{l0}<T,\end{cases} \tag{8}$$

где c_i – удельная теплоемкость, λ_i – теплопроводность, ρ_i – плотность i-й фазы.

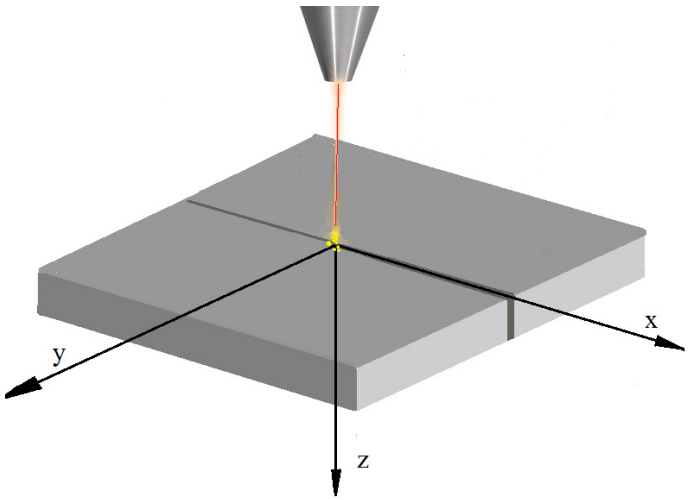


Рис. 2. Процесс сварки металлических пластин

На поверхности $z=0$ в областях твердой и жидкой фаз граничное условие имеет вид:

$$\lambda_i \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = (\alpha_{k1} + \alpha_r)\left(T\big|_{z=0} - T_g\right) - q_1,\ \left(x - r_f\right)^2 + y^2 > 4r_f^2. \qquad (9)$$

Также имеется условие для нижней поверхности пластины, т.е. для $z = h$

$$\lambda_i \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=h} = (\alpha_{k2} + \alpha_r)\left(T\big|_{z=h} - T_g\right). \qquad (10)$$

На поверхности фазового перехода запишем условие Стефана

$$\left(\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n}\right)_2 - \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n}\right)_1 = \rho_1 knv. \qquad (11)$$

На поверхности парового канала $\left(x - r_f\right)^2 + y^2 \le \left(2r_f\right)^2$ справедливо уравнение теплового канала

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} = q_l n + q_r + q_v + q_c + q_b. \qquad (12)$$

На достаточно большом расстоянии от луча лазера температура по всей толщине пластин принимается равной температуре окружающей среды:

$$T\big|_{x->\pm\infty} = T_g, T\big|_{y->\pm\infty} = T_g.$$

При описании модели парогазового канала учтем, что дно парового канала имеет форму сферической поверхности, радиус которой

$$R_c = \frac{2\sigma}{\rho_{\max} - \rho_3 g h_c}. \qquad (13)$$

Образующая поверхности парового канала AC, лежащая в плоскости $y=0$, ищется в виде линии, состоящей из двух частей (рис. 3) [3].

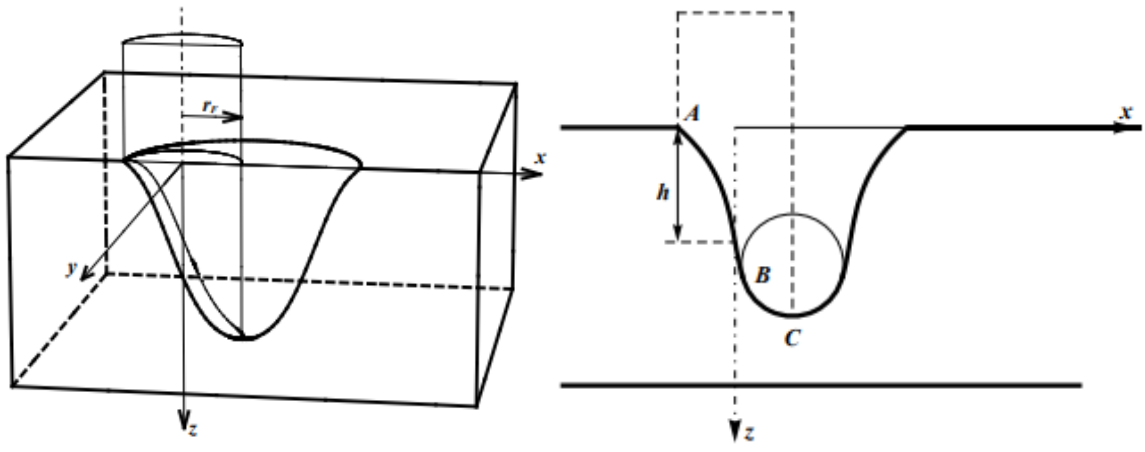


Рис. 3. Схема расположения парового канала и луча лазера

Уравнение AB имеет вид

$$x(z)=\frac{(r_F-ch)(z-h)^3}{h^3}+c(z-h),\ 0\le c\le\frac{r_F}{h},\ h>0. \qquad (14)$$

Для решения задачи (7)-(12) применим разностную схему:

$$\frac{T_{ijk}^{n+1}-T_{ijk}^{n}}{\tau}=\delta\left(L_x\left(T_{ijk}^{n+1}\right)+L_y\left(T_{ijk}^{n+1}\right)+L_z\left(T_{ijk}^{n+1}\right)\right)+$$

$$+(1-\delta)\left(L_x\left(T_{ijk}^{n}\right)+L_y\left(T_{ijk}^{n}\right)+L_z\left(T_{ijk}^{n}\right)\right). \qquad (15)$$

Здесь

$$L_x\left(T_{ijk}^{n}\right)=\frac{1}{h_x}\left(\lambda_{ijk}^{n}\frac{T^{n}{}_{(i+1)jk}-T^{n}{}_{ijk}}{h_x}-\lambda_{ijk}^{n}\frac{T^{n}{}_{ijk}-T^{n}{}_{(i-1)jk}}{h_x}\right)-$$

$$-b\frac{T^{n}{}_{(i+1)jk}-T^{n}{}_{(i-1)jk}}{2h_x},$$

$$L_y\left(T_{ijk}^{n}\right)=\frac{1}{h_y}\left(\lambda_{ijk}^{n}\frac{T^{n}{}_{i(j+1)k}-T^{n}{}_{ijk}}{h_y}-\lambda_{ijk}^{n}\frac{T^{n}{}_{ijk}-T^{n}{}_{i(j-1)k}}{h_y}\right),$$

$$L_z\left(T_{ijk}^{n}\right)=\frac{1}{h_z}\left(\lambda_{ijk}^{n}\frac{T^{n}{}_{ij(k+1)}-T^{n}{}_{ijk}}{h_z}-\lambda_{ijk}^{n}\frac{T^{n}{}_{ijk}-T^{n}{}_{ij(k-1)}}{h_z}\right).$$

Трехмерную разностную схему (15) заменим последовательностью трех одномерных разностных схем.

$$\frac{T_{ijk}^{n+1/3}-T_{ijk}^{n}}{\tau}-\delta L_x\left(T_{ijk}^{n+1/3}\right)-(1-\delta)L_x\left(T_{ijk}^{n}\right)=$$

$$=\delta\left(L_y\left(T_{ijk}^{n+1/3}\right)+L_z\left(T_{ijk}^{n+1/3}\right)\right)+(1-\delta)\left(L_y\left(T_{ijk}^{n}\right)+L_z\left(T_{ijk}^{n}\right)\right); \qquad (16)$$

$$\frac{T_{ijk}^{n+2/3}-T_{ijk}^{n+1/3}}{\tau}-\delta L_y\left(T_{ijk}^{n+2/3}\right)-(1-\delta)L_y\left(T_{ijk}^{n+1/3}\right)=$$

$$=\delta\left(L_x\left(T_{ijk}^{n+2/3}\right)+L_z\left(T_{ijk}^{n+2/3}\right)\right)+(1-\delta)\left(L_x\left(T_{ijk}^{n+1/3}\right)+L_z\left(T_{ijk}^{n+1/3}\right)\right); \qquad (17)$$

$$\frac{T_{ijk}^{n+1}-T_{ijk}^{n+2/3}}{\tau}-\delta L_z\left(T_{ijk}^{n+1}\right)-(1-\delta)L_z\left(T_{ijk}^{n+2/3}\right)=$$

$$=\delta\left(L_x\left(T_{ijk}^{n+1}\right)+L_y\left(T_{ijk}^{n+1}\right)\right)+(1-\delta)\left(L_x\left(T_{ijk}^{n+2/3}\right)+L_y\left(T_{ijk}^{n+2/3}\right)\right). \qquad (18)$$

К каждой из разностных схем (16), (17) и (18) будем применять метод разностной прогонки.

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. К. Вабищевич. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

2. Бородин, С. Л. Численные методы решения задачи Стефана / С. Л. Бородин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Т. 1, № 3. – С. 164–175.

3. Черепанов, А. Н. Численное моделирование теплофизических процессов при лазерно-лучевой сварке с образованием парового канала / А. Н. Черепанов, В. П. Шапеев, В. М. Фомин, Л. Г. Семин // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 5. – С. 88–96.

СГЛАЖИВАЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

А. Н. Тында, Д. В. Сальников

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: tyndaan@mail.ru, dimoshka96@gmail.com

Введение

Одним из подходов, применяемых при решении слабосингулярных интегро-дифференциальных уравнений с решениями, производные которых имеют неограниченные производные на левом конце интервала интегрирования, является использование неравномерных сеток [1–3]. Однако при использовании существенно неравномерных сеток могут возникнуть значительные ошибки округления, что значительно ухудшает численные результаты.

В данной работе рассматривается другой подход. Сначала мы с помощью введения новой функции переходим от интегро-дифференциального к интегральному уравнения Вольтерра II рода, после этого регуляризируем решение интегрального уравнения, введя подходящую новую независимую переменную, а затем решаем преобразованное уравнение классическими методами на равномерной или слегка неравномерной сетке. Такой подход широко известен, (см., например, работы [4–6]), однако в большинстве случаев в литературе рассматриваются преобразования, предназначенные для конкретных типов уравнений. В данной работе изложим общий метод сглаживания для широкого класса слабо-

сингулярных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и приведем численные результаты, подтверждающие его эффективность.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра вида

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t) + \int_0^t K_0(t,s)y(s)ds + \int_0^t K_1(t,s)y'ds, \tag{1}$$

где $0 \le t \le b, b > 0$, с заданным начальным условием

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in R = (-\infty, \infty). \tag{2}$$

Предположим, что

$$p, q \in C^{m,v}(0,b], K_0, K_1 \in W^{m,v}, m \in N = 1,2,\ldots, v \in R, v < 1, \tag{3}$$

где $C^{m,v}(0,b]$ и $W^{m,v}(\Delta_b)$ определяются следующим образом. А именно, $C^{m,v}(0,b]$, $m \in N, v \in R, v < 1$, набор непрерывных функций $y:[0,b] \to R$ которые m раз непрерывно дифференцируемы в $(0,b]$ и такие, что справедлива оценка

$$|y^{(j)}(t)| \le c \begin{cases} 1, & j < 1 - v, \\ 1 + |\log t|, & j = 1 - v, \\ t^{1-v-j}, & j > 1 - v. \end{cases} \tag{4}$$

для некоторой константы $c = c(y)$ для всех $t \in (0,b]$ и $j = 1,\ldots,m$.

$W^{m,v}(D_b)$, $m \in N$, $v < 1$, определяется в работе [7] как множество всех m раз непрерывно дифференцируемых функций $K: D_b \to R$ удовлетворяющее

$$|(\frac{\partial}{\partial t})^i (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s})^j K(t,s)| \le c \begin{cases} 1, & v + i < 0, \\ 1 + |\log(t-s)|, & v + i = 0, \\ (t-s)^{-v-i}, & v + i > 0, \end{cases} \tag{5}$$

для некоторой константы $c = c(K)$, для всех $(t,s) \in \Delta_b$ и всех неотрицательных целых чисел i и j таких, что $i + j \le m$; если $v < 0$ то мы предполагаем что $K(t,s)$ имеет непрерывное расширение (которое мы снова обозначим через $K(t,s)$) в замкнутой области $\overline{\Delta_b}$. Заметим, что если $0 \le v < 1$, тогда из (5) (где $i = j = 0$) что $K(t,s)$ может обладать слабой особенностью при $s \to t$; если $v < 0$, тогда $K(t,s)$ ограничена на Δ_b, но ее производные могут иметь особенность при $s \to t$.

Введя в (1) новую неизвестную функцию $z = y'$ или

$$y(t) = y_0 + \int_0^t z(s)ds, \quad t \in [0,b],$$

задачу (1)-(2) можно представить в виде следующего линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно z

$$z(t) = \int_0^t K_0(t,s)(\int_0^s z(\tau)d\tau)ds + \int_0^t [p(t) + K_1(t,s)]z(s)ds + f(t), t \in [0,b]. \quad (6)$$

Изменяя порядок интегрирования в двойном интеграле в (6) получим

$$z(t) = \int_0^t K(t,s)z(s)ds + f(t), \quad t \in [0,b], \quad (7)$$

где

$$f(t) = q(t) + y_0 p(t) + y_0 \int_0^t K_0(t,s)ds, \quad t \in [0,b], \quad (8)$$

$$K(t,s) = K_1(t,s) + K_2(t,s) + K_3(t,s), \quad (t,s) \in \Delta_b \quad (9)$$

где

$$K_3(t,s) = p(t), \quad (t,s) \in \Delta_b,$$

и

$$K_2(t,s) = \int_s^t K_0(t,\tau)d\tau, \quad (t,s) \in \Delta_b. \quad (10)$$

Лемма 2.1 *Предположим, что выполнены условия (3). Тогда уравнение (7) имеет единственное решение* $z \in C^{m,v}(0,b]$ *и задача (1)-(2) имеет единственное решение* $y \in C^{m+1,v-1}(0,b]$.

С доказательством всех лемм, встречающихся в работе, можно ознакомиться в статье [7].

2. Сглаживающее преобразование

Для данного $m \in N$, $0 < a \in R$, $0 < b \in R$, $1 \le d \in R$ пусть

$$\phi : [0,a] \to [0,b] \quad (11)$$

– преобразование, которое отображает $[0,a]$ на $[0,b]$ и такое, что

$$\phi \in C^m[0,a]. \quad (12)$$

$$c_1 t^{d-1} \le \phi'(t) \le c_2 t^{d-1}, \quad 0 \le t \le a, \quad (13)$$

$$|\phi^{(j)}(t)| \le c t^{d-j}, \quad 0 \le t \le a, \quad 0 \le j \le \min\{d,m\}, \quad (14)$$

где $c_2 \ge c_1 > 0$ и $c > 0$ некоторые константы. Следствием (13) является

$$|\phi(t)-\phi(s)|\geq c_0\,|t-s|\,(t^{d-1}+s^{d-1}),\quad s,t\in[0,a], \tag{15}$$

с константой $c_0>0$, которая не зависит от $t,s\in[0,a]$.

В случае $d=1$ преобразование (11) изоморфно (имеет непрерывный обратный оператор). Нас интересуют преобразования ϕ с $d>1$, поскольку они обладают сглаживающим свойством для решения $z(\phi(t))$ с особенностью при $x=0$.

Простейший пример функции ϕ, удовлетворяющей (11)-(14), задается формулой

$$\phi(t)=ba^{-d}t^d,\quad 0\leq t\leq a, \tag{16}$$

с $d\in N$ в случае $d\leq m$ и $d\in R$ в случае $d>m$. Класс примеров задается функциями

$$\phi\in C^n[0,a],\quad n\geq m, \tag{17}$$

удовлетворяющими

$$\phi'(t)>0,\quad 0<t\leq a. \tag{18}$$

$$\phi^{(j)}(0)=0,\quad j=0,1,\ldots,d-1;\quad \phi^{(d)}(0)\neq 0,\quad N\ni d\leq n. \tag{19}$$

Конкретный пример, удовлетворяющий (17)-(19) и часто применяемый на практике, задается формулой

$$\phi(t)=2^{d/2}b\left(\sin\left(\frac{\pi}{4a}t\right)\right)^d,\quad N\ni d\leq n. \tag{20}$$

Лемма 3.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

• $u\in C^{m,v}[0,b]$, $m\in N$, $b\in R$, $v<1$, $b>0$;

• $\phi:[0,a]\to[0,b]$ – преобразование, которое отображает $[0,a]$ $(a>0)$ на $[0,b]$ и удовлетворяет условиям (12)-(14), где $d\in N$ в случае $d\leq m$ и $d\in R$ в случае $d>m$;

• $v(t)=u(\phi(t)),t\in[0,a]$.

Тогда $v\in C^{m,v_d}[0,a]$ с

$$v_d=1-d(1-v). \tag{21}$$

3. Аппроксимация

Для данного $m\in N$, $0<a\in R$, $0<b\in R$, $1\leq d\in R$ пусть $\phi:[0,b]\to[0,b]$ преобразование, которое отображает $[0,b]$ на $[0,b]$ и удовлетворяет условиям (12)-(14). Введя в (7) замену переменных

$$y=\phi(s),\quad x=\phi(t),\quad (t,s\in[0,b]), \tag{22}$$

мы получим интегральное уравнение вида

$$z_\phi(t) = \int_0^t K_\phi(t,s) z_\phi(s) ds + f_\phi(t), \quad t \in [0,b], \tag{23}$$

где $f_\phi(t) = f(\phi(t))$ и

$$K_\phi(t,s) = K(\phi(t),\phi(s))\phi'(s) \tag{24}$$

некоторые заданные функции и $z_\phi(t) = z(\phi(t))$ – искомая функция. Используя (24), введем интегральный оператор T_ϕ

$$(T_\phi z)(t) = \int_0^t K_\phi(t,s) z(s) ds, \quad t \in [0,b]. \tag{25}$$

Лемма 3.1 *Пусть* $K \in C^{m,\nu}(D_b)$, $m \in N$, $\nu \in R$, $\nu < 1$, *и предположим, что* ϕ *удовлетворяет условиям (12)-(14) с* $d > 1$. *Тогда* T_ϕ – *компактный оператор, действующий из* $L^\infty(0,b)$ *на* $C[0,b]$ *и* $L^\infty(0,b)$.

Для решения данного уравнения будем использовать метод последовательных приближений. Тогда уравнение (23) запишется в виде

$$z_\phi^{(m+1)}(t) = \int_0^t K_\phi(t,s) z_\phi^{(m)}(s) ds + f_\phi(t), \quad t \in [0,b], \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{26}$$

Интеграл в уравнении (26) предлагается аппроксимировать методом, предложенным в [8]. Запишем ядро с особенностью в общем виде

$$\int_a^t \frac{h(t,s)}{(t-s)^\alpha} ds. \tag{27}$$

Разобьем отрезок $[a,t]$ на $n+1$ узел

$$s_{n-k} = a + (t-a)\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{m+1}{1+\alpha}}\right), k = 0,1,\ldots,n. \tag{28}$$

На каждом сегменте $s_{k-1} \le s \le s_k, k = 1,2,\ldots,n$ аппроксимируем интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса с $[m/2]+1$ узлами

$$s_k^j = \frac{s_k + s_{k-1}}{2} + \frac{s_k - s_{k-1}}{2} y_j, \; j = 1,2,\ldots[m/2]+1$$

где y_j – корни многочлена Лежандра степени $[m/2]+1$ (квадратные скобки обозначают целую часть).

Тогда имеем

$$\int_a^t \frac{h(t,s)}{(t-s)^\alpha} ds = \sum_{k=1}^n \frac{s_k - s_{k-1}}{2} \sum_j^{[m/2]+1} W_j \frac{h(t,s_k^j)}{(t-s_k^j)^\alpha} + R_n, \tag{29}$$

где весовые коэффициенты W_j и узлы y_j заданы таблично, а теоретическая погрешность формулы взята из [9] и задается формулой

$$R_n = O\left(\frac{t-a}{n}\right)^{m+1}.$$

Однако применение этой формулы на практике при достаточно большом n приводит к значительным ошибкам округления. Поэтому мы модифицируем формулу (29) следующим образом:

$$\int_a^t \frac{h(t,s)}{(t-s)^{\alpha}} ds = \int_a^t \frac{h(t,s)-h(t,t)}{(t-s)^{\alpha}} ds + \int_a^t \frac{h(t,t)}{(t-s)^{\alpha}} ds =$$

$$= \int_a^t \frac{h(t,s)-h(t,t)}{(t-s)^{\alpha}} ds + \frac{h(t,t)(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \tag{30}$$

$$= \frac{h(t,t)(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{2} \sum_{j}^{[m/2]+1} W_j \frac{h(t,s_k^j)-h(t,t)}{(t-s_k^j)^{\alpha}} + O\left(\frac{t-a}{n}\right)^{m+1}.$$

Поскольку размер величины $(t-a)$ может быть достаточно малым при больших числах N, примем $n=[(t-a)N]+1$. Тогда оценка погрешности формулы (30) примет вид $O(N^{-(m+1)})$.

После того, как мы решим уравнение (27) и найдем функцию $z_{\phi}(t)$ можно найти искомое приближенное решение уравнения (7)

$$z(t) = z_{\phi}(\phi^{-1}(t)).$$

Так как $z(t) = y'(t)$, искомое решение уравнения (1) будет найдено как $y(t) = y_0 + \int_0^t z(s)ds, \quad t \in [0,b]$.

4. Численные результаты

Рассмотрим уравнение вида (1) в котором заданы следующие функции

$$K_0 = \frac{s}{\sqrt{t-s}}, \quad K_1 = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}}, \quad p(t)=1, \quad q(t) = \frac{3\sqrt{t}}{2} - 3t\sqrt{t} - \frac{5\pi t^3}{16}$$

с точным решением $y = t^{3/2}$ и сглаживающее преобразование вида

$$\phi(t) = b^{1-d}t^d, \quad b=1, d=2.$$

Были получены следующие результаты для $n=30$ в формуле (28), N – число разбиений отрезка, M – число итераций в методе последовательных приближений.

Таблица 1

Максимальная погрешность до и после
применения сглаживающего преобразования

	ε_{max}	ε^{ϕ}_{max}
M = 10		
N = 10	9.529750e-02	9.640944e-02
N = 20	9.613141e-02	9.637804e-02
N = 30	9.604787e-02	9.637772e-02
M=20		
N = 10	1.073786e-03	4.169262e-05
N = 20	2.167889e-04	4.166898e-05
N = 30	2.927593e-04	4.168703e-05
M=30		
N = 10	1.122365e-03	6.882133e-06
N = 20	2.653599e-04	6.881717e-06
N = 30	3.413262e-04	6.881702e-06

Библиографический список

1. Brunner, H. The numerical solution of weakly singular Volterra integral equations by collocation on graded meshes / H. Brunner // Math. Comp. – 1985. – Vol. 45. – P. 417–137.

2. Brunner, H. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations / H. Brunner. – Cambridge : Cambridge University Press, 2004.

3. Тында, А. Н. Эффект сверхсходимости в численных методах решения интегральных уравнений второго рода / А. Н. Тында, Д. В. Сальников // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза, 2017.

4. Diogo, T. Collocation methods for second-kind Volterra integral equations with weakly singular kernels / T. Diogo, S. McKee, T. Tang. – Edinburgh : Proc. Roy. Soc., 1994. – P. 199–210.

5. Pedas, A. Numerical solution of weakly singular Volterra integral equations with change of variables / A. Pedas, G. Vainikko // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. – 2004. – Vol. 53 (2). – P. 99–106.

6. Тында, А. Н. Сглаживающие преобразования слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра II рода / А. Н. Тында, Д. В. Сальников // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза, 2018.

7. Diogo, T. Smoothing transformation and spline collocation for weakly singular Volterra integro-differential equations / T. Diogo, P. Lima, A. Pedas, G. Vainikko // Applied Numerical Mathematics. – 2017. – Vol. 114. – P. 63–76.

8. Tynda, A. N. Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations / A. N. Tynda // Труды Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, № 1.

9. Tynda, A. N. Gauss-type quadratures for weakly singular integrals and the application to Fredholm integral equations of the second kind / A. N. Tynda // Math. Comp. – 1994. – Vol. 62. – P. 739–753.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕШАЮЩИХ ДЕРЕВЬЕВ

П. И. Морозов, Е. Г. Романова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: pavelvladimirmorozov@gmail.com

С каждым годом растёт потребность в изучении больших данных как для компаний, так и для активных энтузиастов. Такое изучение в настоящее время производят с помощью статистической обработки и методов машинного обучения. Во многих крупных компаниях всё чаще используются такие инструменты для изучения данных, как язык программирования R, или библиотеки для Python. С каждым годом производительность компьютеров растёт, а значит открывается простор для изучения больших данных, с чем и связано в первую очередь создание «науки о больших данных», изучение которого в основном стало возможным благодаря применению ранее описанных алгоритмов машинного обучения.

Рассмотрим методы машинного обучения: дерево решений и случайный лес. В статье данные алгоритмы реализованы на языке Python и проведено их сравнение с алгоритмами логистической регрессии и градиентного бустинга, реализованными в библиотеке sklearn на нескольких наборах данных [1].

Для начала напомним некоторые понятия.

Деревом называется конечный связный граф с множеством вершин V, не содержащий циклов и имеющий выделенную вершину $v_0 \in V$, в которую не входит ни одно ребро. Эта вершина называется корнем дерева. Вершина, не имеющая выходящих рёбер, называется терминальной или листом. Остальные вершины называются внутренними. Дерево называется бинарным, если из любой его внутренней вершины выходит ровно два ребра. Выходящие рёбра связывают каждую внутреннюю вершину v с левой дочерней вершиной L_v и с правой дочерней вершиной R_v.

Бинарное решающее дерево – это алгоритм классификации, задающийся бинарным деревом, в котором каждой внутренней вершине

$v \in V$ приписан предикат $\beta_v : X \to \{0,1\}$, каждой терминальной вершине $v \in V$ приписано имя класса $c_v \in Y$. При классификации объекта $x \in X$ он проходит по дереву путь от корня до некоторого листа.

Объект x доходит до вершины v тогда и только тогда, когда выполняется конъюнкция $K_v(x)$, составленная из всех предикатов, приписанных внутренним вершинам дерева на пути от корня v_0 до вершины v.

Задача построения дерева минимальной сложности, правильно классифицирующего заданную выборку, в общем случае является NP-полной задачей. На практике применяют различные, более или менее удачные, эвристики, нацеленные на построение как можно более простого дерева, обладающего как можно лучшим качеством классификации. Выбор эвристик неоднозначен, как обычно бывает в таких случаях. Придумано огромное количество различных методов синтеза бинарных решающих деревьев по обучающей выборке.

Идея алгоритма заключается в последовательном дроблении выборки на две части до тех пор, пока в каждой части не окажутся объекты только одного класса.

Случайный лес (random forest) – алгоритм машинного обучения, заключающийся в использовании ансамбля решающих деревьев. Основная идея состоит в использовании большого ансамбля решающих деревьев, каждое из которых само по себе даёт очень невысокое качество классификации, но за счёт их большого количества результат получается хорошим.

Пусть обучающая выборка состоит из N образцов, размерность пространства признаков равна M, и задан параметр m (в задачах классификации обычно $m \approx \sqrt{M}$) как неполное количество признаков для обучения.

Построение деревьев ансамбля осуществляется следующим способом (называемым бэггинг (bagging, сокращение от bootstrap aggregation)):

1. Сгенерируем случайную подвыборку с повторениями размером N из обучающей выборки. (Таким образом, некоторые образцы попадут в неё два или более раза, а в среднем $N\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$, а примерно $\frac{N}{e}$ образцов не войдут в неё вообще). Те образцы, которые не попали в выборку, называются out-of-bag (неотобранные).

2. Построим решающее дерево, классифицирующее образцы данной подвыборки, причём в ходе создания очередного узла дерева будем выбирать набор признаков, на основе которых производится разбиение (не из всех M признаков, а лишь из m случайно выбранных).

3. Дерево строится до полного исчерпания подвыборки и не подвергается процедуре прунинга (pruning – отсечение ветвей).

Каждое дерево ансамбля относит классифицируемый объект к одному из классов, а итоговая классификация объекта проводится путём голосования.

Эксперимент 1

Набор данных: для обучающей выборки был сгенерирован набор из 500 точек в диапазоне $x \in (0,30), y \in (0,30)$, а для тестовой выборки были выбраны 100 точек в трех диапазонах:

1. $x \in (0,30), y \in (0,30)$ (одинаковые)
2. $x \in (-30,60), y \in (-60,90)$ (пересекающиеся)
3. $x \in (-30,0), y \in (-30,0)$ (не пересекающиеся).

В данном эксперименте в качестве разделяющей границы была взята диагональная прямая $y = x$.

Решающее дерево: в первом случае, когда тестовые точки частично лежат в диапазоне обучающей выборки, показало точность 0.97, но на второй и третьей тестовых выборках показатель точности ухудшился. Это связано с тем, что решающее дерево строит границы, параллельные осям координат и за диапазоном обучающей выборки граница будет представлять собой прямую, параллельную оси x или оси y, из-за чего точность за диапазоном обучающей выборки ухудшается, т.к. точная разделяющая граница для данного набора проходит по диагонали. В итоге на второй тестовой выборке получили точность – 0.84, на третьей – 0.55.

Для остальных методов возьмем третью тестовую выборку, т.к. это самый неблагоприятный случай.

Случайный лес: Точность леса зависит он процента выборки, используемой для построения каждого отдельного дерева, поэтому строились леса, в которых каждое дерево строилось по 50% и 70% выборки:

При большом проценте выборки лес заполняется очень похожими деревьями и не дает выигрыша при увеличении количества деревьев. При использовании 50% выборки строится более эффективный случайный лес, но точность леса может как улучшаться от количества деревьев, так и ухудшаться т.к. каждое новое дерево достаточно сильно отличается от предыдущих.

Логистическая регрессия: показала лучший результат – 1.0. Что было ожидаемо, ведь данный набор лучше всего подходит для логистической регрессии т.к. граница, разделяющая объекты разных классов, является линейной.

Градиентный бустинг: показал качество почти как одиночное дерево решений.

Итог эксперимента: Данный набор является простейшим и отлично подходит для классификации с помощью алгоритма логистиче-

ской регрессии, но при этом является достаточно сложным случаем для решающих деревьев. В ходе эксперимента это подтвердилось и решающее дерево на тестовой выборке, лежащей вне диапазона обучающей выборки, показало худшую точность, а ансамблям решающих деревьев (случайному лесу и градиентному бустингу) не удалось сильно увеличить точность по сравнению с одиночным деревом. На основе этого можно сделать вывод о том, что алгоритм решающего дерева и его ансамбли плохо подходят для экстраполяции зависимостей. Данные результаты эксперимента так же подтверждают теоретические предположения, что говорит о корректности реализованного метода и далее проведем эксперименты на простейших реальных данных.

	Метод	Точность
0	Дерево	0.545455
1	Случайный лес	0.787878
2	Логистическая регрессия	1.000000
3	Градиентный бустинг	0.545455

Эксперимент 2

Набор данных: здесь набор данных представляет собой коллекцию рукописных цифр, представленных в виде картинок 8x8 пикселей [1].

Замечание: Данный набор достаточно большой и т.к. реализованный метод является неоптимальным и достаточно медленно работает, а также используемый процессор имеет не очень высокую производительность, то для экономии времени для данного набора данных будем использовать алгоритмы дерева и случайного леса, реализованные в библиотеке sklearn.

Решающее дерево: показало точность 0.85.

Случайный лес: в данном случае увеличил точность на 13%, относительно одиночного дерева.

Логистическая регрессия: показала точность на 1.4% хуже, чем у случайного леса.

	Метод	Точность
0	Дерево	0.855556
1	Случайный лес	0.980556
2	Логистическая регрессия	0.966667
3	Градиентный бустинг	0.969444

Градиентный бустинг: так же улучшил показатели точности по сравнению с одиночным деревом и графики зависимости показателей точности градиентного бустинга и случайного леса достаточно похожи,

но, при одинаковом количестве деревьев в композиции, градиентный бустинг оказался все же менее точным.

Итоги эксперимента: на данном наборе решающее дерево показало не очень хорошую точность, но алгоритмы случайного леса и градиентного бустинга достаточно сильно увеличили показатель качества.

Эксперимент 3

Набор данных: Breast cancer – набор данных, представляющий собой статистику обнаружения рака молочной железы у пациентов и 30 параметров показателей их здоровья [1]. Набор содержит 569 образцов: 212 пациентов у которых обнаружили рак и 357 у которых его не было. Деление набора на обучающую и тестовую выборку проводилось так же, как и в предыдущем эксперименте. Визуализация данного набора не приводится так как в наборе слишком много параметров.

Решающее дерево: на данном наборе показало точность 0.94, как и на предыдущем наборе точность достаточно высокая и использование композиции деревьев скорее всего приведет к повышению точности.

Случайный лес: на этот раз так же повысил точность по сравнению с одиночным деревом, но не так сильно и некоторая доля ошибок осталась. Точность перестала увеличиваться уже при количестве деревьев равном 20 и дальнейшее построение лесов с большим количеством деревьев не дало увеличений точности.

Логистическая регрессия: оказалась немного лучше двух предыдущих алгоритмов, но в целом все алгоритмы показали достаточно высокую точность на данном наборе.

Градиентный бустинг: как можно было предположить, показатели точности градиентного бустинга оказались близки к показателям случайного леса. Показатели бустинга хуже, чем у случайного леса приблизительно на 1%.

	Метод	Точность
0	Дерево	0.938596
1	Случайный лес	0.964912
2	Логистическая регрессия	0.982456
3	Градиентный бустинг	0.956140

Итог эксперимента: данный набор сложнее рассмотренных прежде и несмотря на то, что одиночное решающее дерево показало хорошую точность, ансамбли деревьев не сильно увеличили точность по сравнению с одиночным деревом на данном наборе и ни одному из алгоритмов не удалось добиться идеальной точности, но все же ближе всего оказался алгоритм логистической регрессии.

В ходе работы были изучены и реализованы на языке Python два алгоритма машинного обучения: решающее дерево и случайный лес,

проведено их сравнение на нескольких наборах данных с библиотечными реализациями алгоритмов логистической регрессии и градиентного бустинга. Все из алгоритмов показали приблизительно одинаковую точность предсказаний на простейших реальных данных, но при этом, на синтетическом примере было показано, что на некоторых наборах данных использование деревьев решений и их ансамблей оказывается не эффективным. Особенной это касается экстраполяции зависимостей с помощью алгоритмов на основе решающих деревьев. В остальных же задачах решающее дерево показало хорошую точность предсказания, а алгоритмы случайного леса и градиентного бустинга только улучшали ее.

Библиографический список

1. Scikit-learn: Machine Learning in Python / Pedregosa et al. // JMLR. – 2011. – Vol. 12. – P. 2825–2830.

2. Воронцов, К. В. Математические методы обучения по прецедентам (теория обучения машин) / К. В. Воронцов. – 2010. – 141 с. – URL: http://www.ccas.ru/voron

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ НА ТЕЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

И. В. Бойков, Н. С. Степанов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail:i.v.boykov@gmail.com; ctnik1998@mail.ru

Статья посвящена приближенному решению прямой задачи дифракции на кластерах произвольных тел в пространствах R_2 и R_3 методом граничных интегральных уравнений. Известно [1], что метод граничных интегральных уравнений приводит прямые задачи дифракции к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода и к гиперсингулярным интегральным уравнениям (в зависимости от граничных условий). Так как решение интегральных уравнений Фредгольма первого рода является некорректной задачей [2], то необходимо привлечение методов регуляризации. В качестве метода регуляризации в данной работе используется непрерывный метод решения операторных уравнений. Его применение иллюстрируется на задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца.

Рассмотрим распространение акустических волн в однородной изотропной среде в R^3 с плотностью ρ, скоростью распространения зву-

ка c и коэффициентом поглощения γ.Полагаем, что в пространстве R_3 находится препятствие D, которое состоит из конечного числа непересекающихся замкнутых, гладких, ограниченных поверхностей. Для определения волнового движения в среде с препятствием D достаточно найти потенциал скоростей $U = U(x,t)$, который удовлетворяет диссипативному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} - c^2 \Delta U = 0$$

и соответствующим граничным условиям на D.

Известно [1], что для гармонически зависящих от времени акустических волн вида $U(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}$ с частотой $\omega > 0$ зависящая от координат амплитуда u удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad (1)$$

где волновое число $k \neq 0$ и равно $k^2 = \frac{\omega(\omega + i\gamma)}{c^2}$. Выберем знак k так, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Im} k \geq 0.$$

Следовательно, математическое описание рассеяния гармонически зависящих от времени волн препятствием D приводит к граничным задачам для уравнения Гельмгольца. Задание величины u на границе препятствия (задача Дирихле) физически соответствует заданию давления акустической волны. Аналогично задание нормальной производной на границе (задача Неймана) физически соответствует заданию нормальной компоненты скорости волны, т.е. рассеянию на акустически жестком препятствии [1].

В данной работе для решения уравнения (1) применяется метод граничных интегральных уравнений, т.к. он позволяет уменьшить размерность задачи. При этом задача решения полученного интегрального уравнения становится некорректной и ее решение требует построения методов регуляризации. В качестве такого метода в работе используется непрерывный метод решения операторных уравнений. Отметим что в случае, когда уравнение

$$\int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D,$$

имеет неединственное решение, то непрерывный операторный метод позволяет получить, по крайней мере, одно решение.

Замечание. Варьируя начальные условия, можно получить несколько линейно-независимых решений.

1. Метод граничных интегральных уравнений

Как известно [1], функции

$$\Phi_1(x,y)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|},\quad x,y\in R^3,\quad x\neq y,$$

$$\Phi_2(x,y)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|),\quad x,y\in R^2,\quad x\neq y,$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Phi+k^2\Phi=0$$

для трехмерной и двумерной областей, соответственно.

Приведем, следуя [1], условия излучения Зоммерфельда в трехмерной и двумерной областях. Эти условия полностью характеризует поведение решений уравнения Гельмгольца на бесконечности. Для трехмерной области условие излучения имеет вид

$$\left(\frac{x}{|x|},grad\,u(x)\right)-iku(x)=o\left(\frac{1}{|x|}\right),\quad |x|\to\infty,$$

для двумерной же области оно имеет вид

$$\left(\frac{x}{|x|},grad\,u(x)\right)-iku(x)=o\left(\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}\right),\quad |x|\to\infty,$$

причем сходимость равномерная по всем направлениям $\frac{x}{|x|}$. Выполнение данного условия необходимо для внешних задач Дирихле и Неймана.

Приведем утверждения о разрешимости внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана для трехмерной области. Аналогичные результаты справедливы и для двухмерного случая.

Теорема 1 [1]. Потенциал простого слоя

$$u(x)=\int_{\partial D}\Phi(x,y)\phi(y)ds(y),\quad x\in R^3\setminus\partial D, \tag{2}$$

с непрерывной плотностью ϕ представляет собой решение внутренней и внешней задач Дирихле, если ϕ является решением интегрального уравнения

$$\int_{\partial D}\Phi(x,y)\phi(y)ds(y)=f(x),\quad x\in\partial D. \tag{3}$$

Теорема 2 [1]. Потенциал двойного слоя

$$v(x)=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)ds(y),\quad x\in R^3\setminus\partial D, \tag{4}$$

с плотностью ψ представляет собой решение внутренней и внешней задач Неймана при условии, что ψ является решением сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)ds(y)=g(x),\quad x\in\partial D, \tag{5}$$

где $\nu(y)$ – внешняя нормаль области D в точке y [1].

Опишем численный метод решения внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана на простейшем примере области $D: x^2+y^2\le R^2$.

Введем две сетки узлов

$$s_k=\frac{2k\pi}{N},\quad x^{(k)}=R\cos(s_k),\quad y^{(k)}=R\sin(s_k),\quad k=\overline{0,N},$$

$$\overline{s}_k=\frac{(2k+1)\pi}{N},\quad \overline{x}^{(k)}=R\cos(\overline{s}_k),\quad \overline{y}^{(k)}=R\sin(\overline{s}_k),\quad k=\overline{0,N-1}.$$

Введем обозначение: дуга

$$\Delta_k=\left\{(x^{(k)},y^{(k)})\cup(x^{(k+1)},y^{(k+1)})\in\{(x^2+y^2)=R^2\}\right\},\quad k=\overline{0,N-1}.$$

Положим

$$x=\{x_1,y_1\},\quad y=\{x_2,y_2\}.$$

Приближенные решения уравнений (3) и (5) будем искать в виде кусочно-постоянных функций

$$\phi_N(x_1,y_1)=\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^{(1)}N_l(x_1,y_1), \tag{6}$$

$$\psi_N(x_1,y_1)=\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^{(2)}N_l(x_1,y_1), \tag{7}$$

где

$$N_l(x_1,y_1)=\begin{cases}1, & \{x_1,y_1\}\in\Delta_l\\ 0, & \{x_1,y_1\}\notin\Delta_l\end{cases}.$$

Таким образом, получаем 2 системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l^{(1)} \int_{\Delta_l} \Phi(\bar{x}_1^{(k)}, \bar{y}_1^{(k)}, x_2, y_2) ds(x_2, y_2) = f(\bar{x}_1^{(k)}, \bar{y}_1^{(k)}), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (8)$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l^{(2)} \int_{\Delta_l} \frac{\partial^2 \Phi(\bar{x}_1^{(k)}, \bar{y}_1^{(k)}, x_2, y_2)}{\partial \nu(x_2, y_2) \partial \nu(x_1, y_1)} ds(x_2, y_2) = g(\bar{x}_1^{(k)}, \bar{y}_1^{(k)}), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (9)$$

Для решения систем уравнений (8), (9) применяется непрерывный операторный метод. Приведем, следуя [3], основные элементы этого метода.

2. Непрерывный операторный метод решения уравнений

Приведем необходимые обозначения**:**

$$B(a,r) = \{z \in B, \| z - a \| \le r\}, S(a,r) = \{z \in B, \| z - a \| = r\},$$

$$\lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\| I + hK \| - 1) / h.$$

Здесь $B-$ банахово пространство, $a, z \in B$, $K-$ линейный оператор, действующий из B в B, $\lambda(K)-$ логарифмическая норма [4] оператора K, $I-$тождественный оператор.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (10)$$

действующее из банахова пространства B в B. Здесь $A(x)$ – нелинейный оператор.

Теорема 3 [3]. Пусть выполнены следующие условия:

1) В банаховом пространстве B существует шар $B = B(x^*, r)$, $r > 0$, в котором уравнение (10) имеет единственное решение x^*;

2) В каждой точке $x \in B$ существует производная Фреше (или Гато) $A'(x)$ оператора $A(x)$;

3) Для любых двух точек x_1 и x_2 шара B выполняется неравенство $\|A'(x_1) - A'(x_2)\| \le L$;

4) Для любого $x \in B$ справедливо неравенство $\Lambda(A'(x)) \le -\alpha$, $\alpha > 0$;

5) Справедливо неравенство $\alpha > L$.

Тогда решение задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\big(x(t)\big) - f, \quad (11)$$

$$x(0) = x_0 \quad (12)$$

сводится к решению операторного уравнения (10) при любом $x_0 \in B$.

Теорема 2 [3]. Пусть уравнение (10) имеет решение x^* и на любой дифференцируемой кривой g(t), расположенной в шаре $B(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

1) при любом $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t} \lambda(A'(g(\tau)))d\tau < 0;$$

2) справедливо неравенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \lambda(A'(g(\tau)))d\tau < -\alpha, \alpha > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (11), (12) сходится к решению уравнения (10).

3. Решение модельных примеров

Применим к системам (8) и (9) непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений.

$$\frac{d\alpha_k^{(1)}(v)}{dv} = \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l^{(1)}(v) \int_{\Delta_l} \Phi(\overline{x}_1^{(k)}, \overline{y}_1^{(k)}, x_2, y_2)ds(x_2, y_2) - f(\overline{x}_1^{(k)}, \overline{y}_1^{(k)}),$$

$k = \overline{0, N-1},$

$$\frac{d\alpha_k^{(2)}(v)}{d(v)} = \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l^{(2)}(v) \int_{\Delta_l} \frac{\partial^2 \Phi(\overline{x}_1^{(k)}, \overline{y}_1^{(k)}, x_2, y_2)}{\partial\nu(x_2, y_2)\partial\nu(x_1, y_1)} ds(x_2, y_2) - g(\overline{x}_1^{(k)}, \overline{y}_1^{(k)}),$$

$k = \overline{0, N-1}.$

Рассмотрим полученные дифференциальные уравнения с начальными условиями

$$\alpha_{k0}^{(1)} = \alpha_{k0}^{(2)} = 0, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Для решения задачи Коши воспользуемся методом Эйлера

$$\alpha_{k,m+1}^{(1)} = \alpha_{k,m}^{(1)} + h\left(\sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{l,m}^{(1)} \int_{\Delta_l} \Phi(\overline{x}_1^{(k)}, \overline{y}_1^{(k)}, x_2, y_2)ds(x_2, y_2) - f(\overline{x}_1^{(k)}, \overline{y}_1^{(k)}) \right),$$

$$k = \overline{0, N-1},$$

$$\alpha_{k,m+1}^{(2)} = \alpha_{k,m}^{(2)} + h\left(\sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{l,m}^{(2)} \int_{\Delta_l} \frac{\partial^2 \Phi(\overline{x}_1^{(k)}, \overline{y}_1^{(k)}, x_2, y_2)}{\partial\nu(x_2, y_2)\partial\nu(x_1, y_1)} ds(x_2, y_2) - g(\overline{x}_1^{(k)}, \overline{y}_1^{(k)}) \right),$$

$$k = \overline{0, N-1},$$

где $h(h > 0)$ – шаг метода Эйлера, $m = \overline{0, M}$.

Полученные коэффициенты $\alpha_k^{(1)}$ и $\alpha_k^{(2)}$ для (6) и (7) подставляем в (2) и (4) соответственно. Получим

$$u(x_1,y_1)=\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^{(1)}\int_{\Delta_l}\Phi(x_1,y_1,x_2,y_2)ds(x_2,y_2),\quad x\in R^2\setminus\partial D,$$

$$v(x_1,y_1)=\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l^{(2)}\int_{\Delta_l}\frac{\partial\Phi(x_1,y_1,x_2,y_2)}{\partial\nu(x_2,y_2)}ds(x_2,y_2),\quad x\in R^2\setminus\partial D.$$

Результаты вычислений для задачи Дирихле с граничным условием $f(x,y)=x$ на окружности $x^2+y^2=1$ приведены в следующих таблицах. Здесь N – количество узлов вычислительной схемы, h – шаг метода Эйлера, M – число итераций, ε – погрешность решения задачи в метрике пространства $C_{[a,b]}$, т.е. $\rho(x,y)=\max\limits_{x^2+y^2=1}\left|u(x,y)-f(x,y)\right|$.

Таблица 1

Внутренняя задача Дирихле

N	h	M	ε
20	0.01	500	0.0351351
20	0.01	2000	0.00894362
20	0.001	20000	0.00894373
50	0.01	500	0.0364441
50	0.01	2000	0.00143643
50	0.001	20000	0.0014365
100	0.01	500	0.0367194
100	0.01	2000	0.000354555
100	0.001	20000	0.000354623

Таблица 2

Внешняя задача Дирихле

N	h	M	ε
20	0.01	500	0.0193921
20	0.01	2000	0.000793972
20	0.001	20000	0.000794029
50	0.01	500	0.018934
50	0.01	2000	0.000135862
50	0.001	20000	0.000135901
100	0.01	500	0.0188729
100	0.01	2000	3.20071e-05
100	0.001	20000	3.20603e-05

Библиографический список

1. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния : пер. с англ. / Д. Колтон, Р. Кресс. – Москва : Мир, 1987. – 311 с.

2. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – Москва : Наука, 1974. – 224 с.

3. Бойков, И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.

4. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1970. – 534 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ НА ФРАКТАЛАХ

А. И. Бойкова, В. С. Елпатова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: allaboikova@mail.ru; vladka777shokoladka@mail.ru

Статья является продолжением работы [1].

Введение

В последние десятилетия при изучении различных процессов в физике и технике границы реальных тел, траекторий и т.д. описываются неспрямляемыми кривыми и фракталами. Такой подход требует вычисления интегралов от непрерывных функций на неспрямляемых кривых и фракталах. Непосредственное применение классических квадратурных формул в данном случае неприменимо. В самом деле, рассмотрим интеграл $\int_{\gamma} f(s)ds$, где $\gamma -$ неспрямляемая кривая. (В качестве γ может быть взята «снежинка» Коха). В качестве простейшей квадратурной формулы может быть взята интегральная сумма Римана. Возьмем множество точек t_k, $k = 0,1,\ldots,n$, $t_k \in \gamma$. На каждой дуге $\gamma_k = (t_k, t_{k+1}) \subset \gamma$, возьмем точку $v_k \in \gamma$. Образуем квадратурную формулу

$$\int_{\gamma} f(s)ds = \sum_{k=0}^{n-1} f(v_k)d\gamma_k + R_n,$$

где $d\gamma_k -$ длина дуги γ_k.

Возьмем в качестве $f(t)$ функцию $f(t) \equiv 1$. Тогда

$$\int_{\gamma} ds = \sum_{k=0}^{n-1} f(v_k) d\gamma_k + R_n = \sum_{k=0}^{n-1} d\gamma_k + R_n(f) = \infty + R_n(f) = \infty.$$

Из этого примера следует, что классические квадратурные формулы не применимы для вычисления интегралов по неспрямляемым кривым и фракталам. Это обусловлено тем, что при "классическом" определении длины неспрямляемой дуги и фрактала она (длина) равна бесконечности.

Кроме того, при построении квадратурных формул на кривых бесконечной длины возникает вопрос о распределении конечного числа узлов квадратурной формулы на кривой.

Таким образом, при построении приближенных методов вычисления интегралов на неспрямляемых кривых и фракталах следует использовать методы фрактальной геометрии.

Прежде всего необходимо дать определение интеграла по неспрямляемой кривой и фракталу, которым будем пользоваться при построении вычислительных схем.

Это сделано в первом разделе работы.

Во втором разделе описано построение вычислительных схем.

В третьем разделе приведены результаты вычислительных экспериментов.

1. Определение интегралов по неспрямляемым дугам и фракталам

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} f(\tau) d\tau, \qquad (2.1)$$

где Γ – неспрямляемая кривая. Отметим, что под Γ может подразумеваться как кривая в плоскости ОХУ, так и кривая на плоскости комплексной переменной.

Приведем несколько определений интеграла (2.1).

Вначале приведем определение интеграла (2.1) в «собственном смысле» (по терминологии работы [2]).

Пусть существует взаимо–однозначное и непрерывное отображение $g(z)$ отрезка [0,1] на кривую Γ. Тогда вычисление интеграла (2.1) сводится к вычислению интеграла

$$\int_{0}^{1} f(g(x)) dg(x), \qquad (2.2)$$

но предварительно должен быть решен вопрос о существовании интеграла (2.2).

В.Т. Кондурарь получил следующее утверждение о существовании интеграла (2.2).

Утверждение 1. Контурный интеграл Стильтьеса $\int_{\Gamma} fdg$ существует, если существует такое взаимно–однозначное непрерывное отображение $z(x)$ отрезка [0,1] на Γ, что $f(z(x)) \in H_{\alpha},\ g(z(x) \in H_{\beta},\ \alpha + \beta > 1.$

В работе [2] дано обобщение этого утверждения для функций ограниченной Φ-вариации.

Определение 1. Пусть $\Phi(x) -$ заданная при $x \geq 0$ непрерывная возрастающая функция $\Phi(0) = 0,$ а функция $f(z)$ задана на кривой Γ. Величина

$$\sup_{\tau} \sum_{j=1}^{n} \Phi(f(z_j) - f(z_{j-1})) = v_D(f, \Gamma)$$

называется Φ – вариацией функции f; здесь точная верхняя грань берется по всем разбиениям $\tau = z_j, a = z_0 < z_1 < ... < z_n = b.$

Класс функций ограниченной Φ-вариации обозначается через $V_{\Phi}(\Gamma)$ и состоит из всех функций, Φ – вариации которых конечны.

В работе [2] приведен ряд утверждений о существовании интегралов вида (2.1). Приведем утверждение, обобщающее утверждение 1.

Утверждение 2. Контурный интеграл Стильтьеса (2.1) существует при условиях $f \in V_p(\Gamma),\ g \in V_q(\Gamma),\ 1/p + 1/q < 1,$ если функции f и g не имеют общих точек.

После того как получены условия существования интеграла (2.1), возникает вопрос об его вычислении.

При вычислении по формуле (2.2) необходимо располагать функцией $z = g(x)$ в явном виде. Построение этой функции в общем виде чрезвычайно сложно. Поэтому использование формулы (2.2) в численных расчетах достаточно проблематично.

Более удобным для вычислений является следующее определение интеграла по неспрямляемой кривой и фракталу в комплексной области.

Определение 2. Пусть $\Gamma -$ замкнутая неспрямляемая кривая на комплексной плоскости $C,$ разбивающая ее на части D^+ и D^- так, что бесконечно удаленная точка лежит в D^- и ориентированная положительным образом относительно D^+. Пусть на Γ задана непрерывная функция $f(z),$ имеющая непрерывное продолжение в $\overline{D^+}$. Тогда интеграл (2.1) определяется [3] формулой

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = -\int\int_{D^+} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z}. \qquad (2.3)$$

Напомним [4], что оператор $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ определяется формулой

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Согласно формуле (2.3) вычисление интеграла (2.1) по замкнутой кривой Γ сводится к вычислению интеграла в правой части формулы (2.3) по области D^+, ограниченной кривой Γ. Здесь может быть использован метод Монте--Карло.

2. Методы вычислений

В этом разделе излагается метод вычисления интегралов от непрерывных функций по по неспрямляемой дуге и фракталу. При этом интеграл по замкнутому контуру понимается в смысле определения 2.

В случае, если кривая Γ не является замкнутой, то ее начальная и конечная точки соединяются гладкой кривой. Полученный в результате контур как и прежде обозначим через Γ.

Будем считать, что функция $f(z)$, $z \in \Gamma$, имеет непрерывно дифференцируемое продолжение в области $\bar{D}^+$.

Рассмотрим несколько алгоритмов вычисления интеграла (2.2).

Вначале рассмотрим детерминированный алгоритм.

Пусть область $\bar{D}^+$ находится внутри квадрата $\Omega = [-A, A]^2$.

Обозначим через Δ_{kl} квадраты

$$\Delta_{kl} = [x_k, y_l],\ k,l = 0,1,\ldots,n-1,\ x_k = -A + \frac{2KA}{n},\ k = 0,1,\ldots,n,$$

$$y_l = -A + \frac{2lA}{n},\ l = 0,1,\ldots,n.$$

Пусть $\bar{u}_{kl} = (\bar{x}_k, \bar{y}_l)$, $\bar{x}_k = x_k + A/n$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, $\bar{y}_l = y_l + A/n$, $l = 0,1,\ldots,n-1$.

Построим кубатурную формулу

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = -\int\int_{D^+} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz\bar{d}z = -\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}^{*} \int\int_{\Delta_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}^{*} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{u}_{kl}) \int\int_{\Delta_{kl}} dzd\bar{z} = -8\frac{A^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}^{*} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{u}_{kl}) + R_{nn}(f). \qquad (2.4)$$

Здесь $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}^{*}$ означает суммирование по индексам (k,l) таким, что $\overline{u}_{kl} \in D^{+}$, $|R_{nn}(f)|-$ погрешность кубатурной формулы при вычислении функции $f(z)$.

Таким образом основная проблема при вычислении интеграла заключается в определении принадлежности точки $\overline{u}_{kl}$, $k,l = 0,1,\ldots,n$, области D^{+}.

Погрешность метода складывается из двух составляющих – погрешности кубатурной формулы прямоугольников в квадратах Δ_{kl}, не имеющих общих точек с Γ, и погрешности на границе Γ.

Нетрудно видеть, что первая составляющая не превосходит A/n (это метод прямоугольников для двумерного случая).

Для оценки второй составляющей погрешности нужно оценить число квадратов Δ_{kl}, $k,l = 0,1,\ldots,n-1$, покрывающих кривую Γ. Для этого воспользуемся фрактальной мерой (мерой Минковского).

Определение 3 [2]. Пусть $\Gamma-$ компактное множество на плоскости. Разобьем плоскость на квадраты со стороной $\varepsilon > 0$ и обозначим через $N_{\varepsilon}(\Gamma)$ число тех квадратов, которые имеют общие точки с Γ. Тогда величина

$$d = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_{\varepsilon}(\Gamma)}{\log \varepsilon^{-1}}$$

называется верхней метрической размерностью множества Γ.

Из этого определения следует, что для рассматриваемой кубатурной формулы $N_{\varepsilon}(\Gamma) \asymp (1/\varepsilon)^{d} = n^{d}$, где $\varepsilon = 1/n$.

Максимальная погрешность квадратурной формулы прямоугольников в квадрате Δ_{kl} не превосходит M/n^{3}, $M = \max_{(x,y\in\Omega)} \left| \frac{\partial^{2} f(z)}{\partial \overline{z} \partial z} \right|$.

Таким образом, величина второй составляющей в кубатурной формуле (2.4) не превосходит $Mn^{d}/n^{3} = M/n^{3-d}$, где $d-$ размерность фрактала Γ.

Таким образом, погрешность кубатурной формулы $|R_{nn}(f)| \le M(n^{-1} + n^{-3+d})$.

Второй метод вычисления интеграла (2.3).

Основой второго метода является специальное неравномерное распределение, построенное на продолжении функции $f(z)$ на квадрат Ω. Используя это распределение, реализуется метод Монте-Карло для вычисления интегралов на фрактал, описанный в работе [1].

Библиографический список

1. Бойкова, А. И. Применение методов Монте-Карло к вычислению интегралов на фракталах / А. И. Бойкова, В. С. Елпатова // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XIII Междунар. науч.-техн. конф. (Пенза, Россия, 4–6 декабря 2018 г.). – Пенза, 2018. – С. 27–32.
2. Кац, Б. А. Интеграл Стильтьсса по фрактальному контуру и некоторые его приложения / Б. А. Кац // Известия вузов. Математика. – 2000. – № 10. – С. 21–32.
3. Harrison, J. Stokes theorem for nonsmooth chains / J. Harrison // Bul. Amer. Mat. Soc. – 1993. – Vol. 29, № 2. – P. 235–242.
4. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – Москва : Наука, 1988. – 512 с.

АППРОКСИМАЦИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ СО СЛАБЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

А. Н. Тында, В. В. Бобров, Н. В. Мойко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: tyndaan@mail.ru

Введение

Целью данной статьи является продолжение работы [1], в которой предложен алгоритм аппроксимации слабосингулярных интегралов с особенностями степенного характера с параметром $0 < \alpha < 1$. В данной работе рассмотрим особенность логарифмического типа. Необходимость в приближенном вычислении таких интегралов возникает, в частности, при аппроксимации решений слабосингулярных интегральных уравнений, а также при решении некоторых задач электродинамики наноструктур (например, для определения дипольных моментов по известному распределению электрических полей в тонких сегнетоэлектрических пленках). При этом в большинстве случаев невозможно аналитическое представление таких интегралов, они не выражаются через элементарные функции.

1. Одномерный случай

Рассмотрим сначала одномерный случай.

$$\int_a^b h(t,s)\ln(t-s)^2 ds, \quad \alpha = 0, \quad t \in [a,b].$$

Для аппроксимации интеграла (1) покроем отрезок интегрирования сеткой, сгущающейся к особой точке t по следующему правилу

$$t_i = t - (t-a)\left(\frac{n_1 - i}{n_1}\right)^v, i = 0,\ldots,n_1, \tag{2}$$

$$t_{i+n_1} = t + (b-t)\left(\frac{i}{n_2}\right)^v, i = 0,\ldots,n_2, \tag{3}$$

где n_1 и n_2 – это число узлов сетки слева и справа от особой точки, определяемое по формулам

$$l = \frac{t-a}{b-t}, n_1 = \left[\frac{ln}{l+1}\right], n_2 = n - n1. \tag{4}$$

Параметр v, отвечающий за степень неравномерности сетки, зависит от показателя гладкости r функции $h(t,s)$ по переменной s и порядка особенности α. Он определяется следующим образом

$$v = \frac{r+1}{\alpha + 1 - \varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < |\alpha|.$$

Схема расположения узлов представлена на рис. 1.

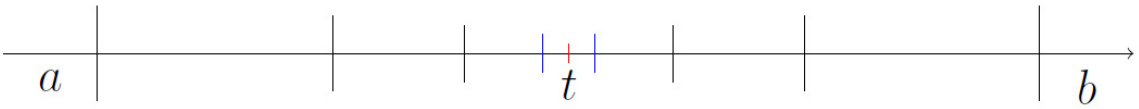


Рис. 1. Одномерная сетка

Интеграл (1) теперь может быть представлен в виде

$$\int_a^b h(t,s)\ln(t-s)^2 ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} h(t,s)\ln(t-s)^2. \tag{5}$$

К каждому из интегралов в правой части (5) применяется квадратурная формула Гаусса по r узлам.

2. Двумерный случай

Рассмотрим теперь интеграл в прямоугольной области на плоскости

$$\int_a^b\int_c^d H(t_1,t_2,s_1,s_2)ds_1 ds_2, \tag{6}$$

$$(t_1,t_2) \in D = \{(t_1,t_2) : a \le t_1 \le b, c \le t_2 \le d\}$$

Здесь $H(t_1,t_2,s_1,s_2)$ – функция с особенностью, имеющая вид

$$H(t_1,t_2,s_1,s_2) = h(t_1,t_2,s_1,s_2)\ln((t_1-s_1)^2+(t_2-s_2)^2), \quad \alpha = 0. \qquad (7)$$

Для двумерного случая выведем формулу из одномерного путём повторного интегрирования [2].

Разобьем область интегрирования на части линиями, параллельными осям координат так, как это показано на рис. 2 для случая $a = c = 0$.

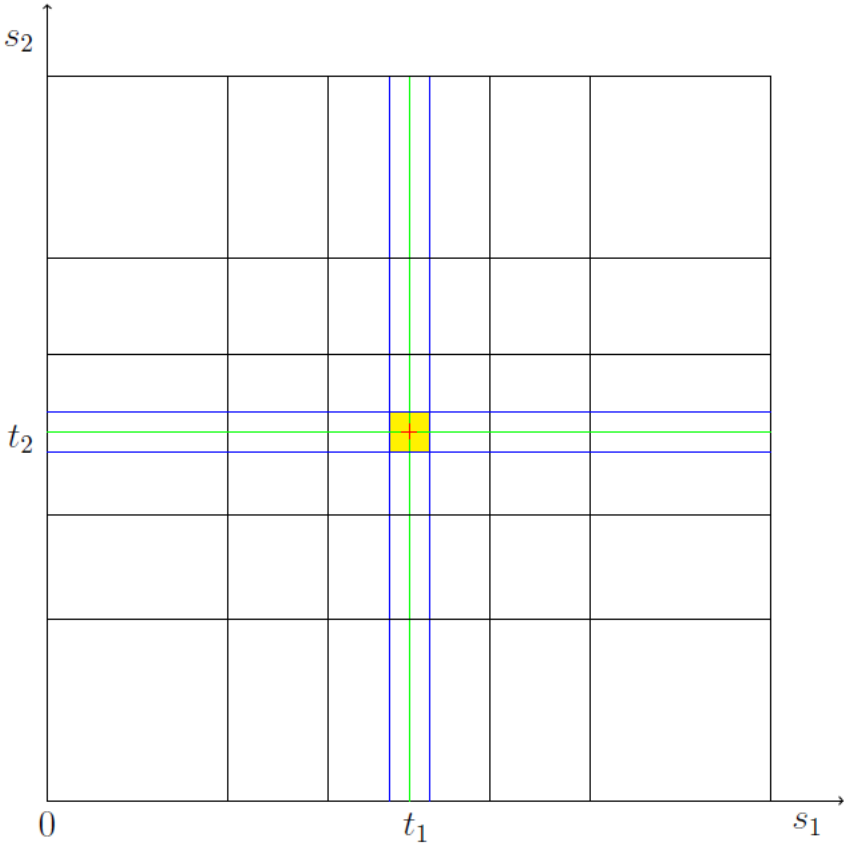


Рис. 2. Двумерная сетка

Абсциссы и ординаты точек пересечения этих линий с осями координат определяются в соответствии с принципом (2)-(3) по каждой из переменных. Интеграл (6) теперь может быть представлени в виде

$$\int_a^b\int_c^d h(t_1,t_2,s_1,s_2)\ln((t_1-s_1)^2+(t_2-s_2)^2)ds_1ds_2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{1,(i-1)}}^{t_{1,i}}\int_{t_{2,(j-1)}}^{t_{2,j}} h(t_1,t_2,s_1,s_2)\ln((t_1-s_1)^2+(t_2-s_2)^2)ds_1ds_2. \qquad (8)$$

Сегмент $[t_{1,(i-1)} \le s_1 \le t_{1,(i)}, t_{2,(j-1)} \le s_2 \le t_{2,(j)}]$ выделен на рис. 2.

Для аппроксимации каждого из интегралов в правой части (8) также применяется составная квадратурная формула Гаусса по r узлам.

$$\int_{t_{1,(i-1)}}^{t_{1,(i)}} \int_{t_{2,(j-1)}}^{t_{2,(j)}} H(t_1,t_2,s_1,s_2)ds_1ds_2 \approx$$

$$\approx \frac{t_{1,(i)}-t_{1,(i-1)}}{2}\frac{t_{2,(j)}-t_{2,(j-1)}}{2}\sum_{k,m=1}^{r} A_kA_mH(t_1,t_2,x_k,y_m), \qquad (9)$$

где x_k и $y_m, (k,m=1,\ldots,r)$ – нули многочленов Лежандра степени r, отображенные на соответствующие интервалы, A_k – весовые коэффициенты.

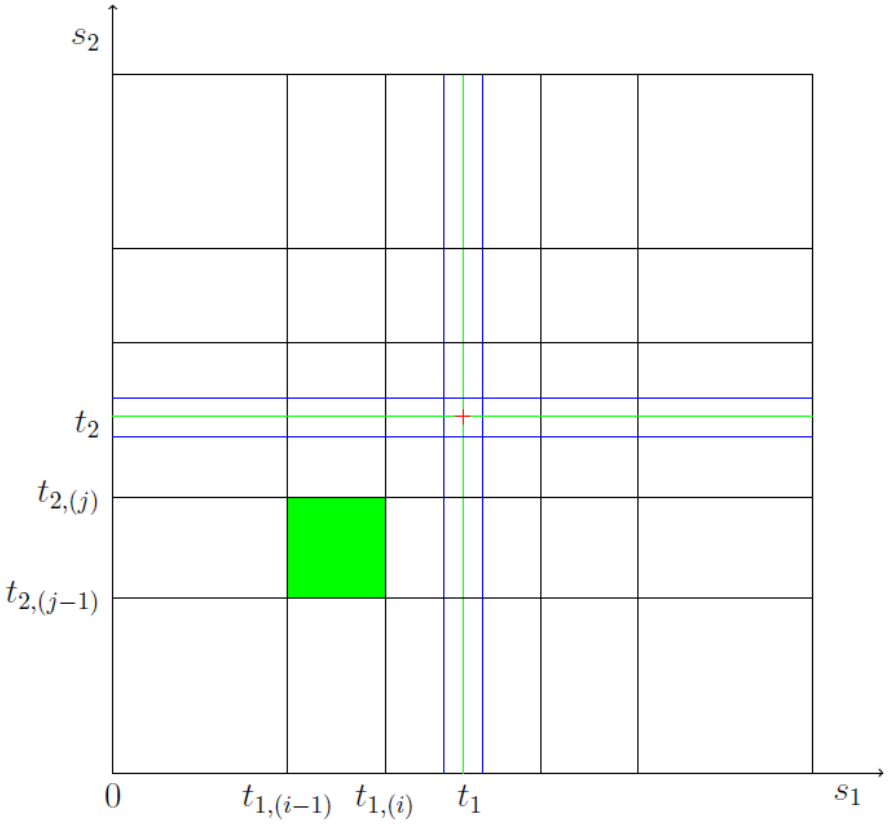


Рис. 3. Иллюстрация области в формуле (9)

3. Численный пример

Приведем результаты вычисления интеграла вида (6) для случая $\alpha=0$, по области $D:[a\le s_1\le b, c\le s_2\le d]$ и особой точкой $C(t_1,t_2)\in D$.

Случай, когда функция $h(t_1,t_2,s_1,s_2)=t_1-s_1$ и область $D:[0\le s_1\le 1, 0\le s_2\le 1]$.

Погрешность аппроксимации в нескольких точках приведена в таблице 1.

Таблица 1

Точность вычисления интеграла для функции $h(t_1,t_2,s_1,s_2)=t_1-s_1$

n	(0.5,0.6)	(0.5,1.0)	(1.0,1.0)
10	0.00148934	0.00106524	0.000374014
20	0.000642547	0.00046877	8.48633e-005
50	0.000241798	0.000177623	1.31692e-005
100	0.000118701	8.73503e-005	3.27745e-006
200	5.88111e-005	4.33142e-005	8.18431e-007
500	2.33952e-005	1.7239e-005	1.30905e-007

Библиографический список

1. Тында, А. Н. К вопросу аппроксимации кратных интегралов с особенностями / А. Н. Тында, В. В. Бобров // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. начн.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза, 2018. – С. 61–65.

2. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1974. – Р. 63–72.

3. Tynda, A. N. Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations / A. N. Tynda // Труды Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 68–78.

4. Бойков, И. В. Параметрическая идентификация линейных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2014. – № 7. – С. 13–23.

5. Бойков, И. В. Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 2 (30). – С. 34–48.

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ВНУТРЕННИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СРЕДСТВАМИ PDE TOOLBOX

Е. Н. Ванина, Е. Ю. Серова, Л. А. Симутина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: evgeniya.vanina2016@yandex.ru;
katja-serova1995@yandex.ru; simutina.1994@mail.ru

Многие прикладные задачи сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных в областях с внутренней плоской симметрией. Одним из наиболее распространенных приближенных ме-

тодов их решения является метод конечных элементов (МКЭ). Данная работа посвящена описанию возможностей пакета расширения Partial Differential Equations Toolbox (PDE Toolbox), предназначенного для решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных в двумерных областях методом конечных элементов. Пакет состоит из набора функций, автоматизирующих реализацию МКЭ для решения различного типа дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) второго порядка и их систем: эллиптических, параболических и гиперболических. Кроме того, в состав пакета входит приложение pdetool с графическим интерфейсом пользователя, использование которого не требует глубокого понимания метода конечных элементов и упрощает доступ к набору функций пакета. Особое место среди всех функций PDE Toolbox Matlab занимает pdetool. Эта функция запускает GUI–приложение PDETool, которое позволяет пользователю пакета в интерактивном режиме выполнять операции по подготовке PDE- модели (прорисовка геометрии, задание граничных условий и распределения коэффициентов PDE и др.), решать PDE и визуализировать решение (в том числе и производить анимацию нестационарных процессов). Функция pdetool с входными параметрами выполняет различные команды GUI–приложения PDETool. В пакете PDE Toolbox она реализована как рекурсивная функция.

Для однозначного определения решения необходимо задать граничные условия. На различных частях границы можно задавать условия Дирихле Неймана или смешанные граничные условия более сложного вида. Однако PDE Toolbox не приспособлен для решения задач с внутренними граничными условиями.

Пусть задана сепаратная система дифференциальных уравнений

$$d_i u_i' - div\left(c_i grad\left(u_i\right)\right) + a_i u_i = f_i, 0 < t < T, \left(x, y\right) \in D_i \tag{1}$$

с граничными условиями Дирихле или Неймана

$$h_i u_i = r_i, \left(x, y\right) \in \partial D_i \ , \ \ n\left(c_i grad\left(u_i\right)\right) + q_i u_i = g_i, \left(x, y\right) \in \partial D_i \tag{2}$$

с внутренними граничными условиями

$$\begin{aligned} & u_1 = u_2, \left(x, y\right) \in \partial D_i, x = 0 \\ & c_1 grad\left(u_1\right) = c_2 grad\left(u_2\right), \left(x, y\right) \in \partial D_i, x = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

и начальными условиями

$$u_i\left(0, x, y\right) = g_i\left(x, y\right) \in D_i \, . \tag{4}$$

Рассмотрим также модельную задачу

$$du' - div\left(cgrad\left(u\right)\right) + au = f, 0 < t < T, \left(x, y\right) \in D = D_1 \cup D_2 \tag{5}$$

с граничными условиями Дирихле

$$hu = r, (x, y) \in \partial D,\ n\left(c\ grad\left(u\right)\right) + qu = g, (x, y) \in \partial D \qquad (6)$$

и начальными условиями

$$u(0, x, y) = g(x, y) \in D. \qquad (7)$$

Будем предполагать, что $D_1 = \varphi(D_2)$, где

$$\varphi : (x, y) \to (-kx, y), k = \sqrt{\frac{d_1 c_2}{d_2 c_1}}, x > 0. \qquad (8)$$

Считаем также, что уравнения в системе (1) инвариантны относительно преобразования φ.

Установим изоморфизм моделей (1)-(4) и (5)-(7) по правилам:

– прямой

$$u_2 = u, x > 0, \quad u_1 = \frac{1 + \frac{\lambda_2}{k\lambda_1}}{2} u + \frac{1 - \frac{\lambda_2}{k\lambda_1}}{2} u \circ \varphi, x < 0, \qquad (9)$$

– обратный

$$u = u_2, x > 0, \quad u = \frac{2k\lambda_1}{k\lambda_1 + \lambda_2} u_1 - \frac{k\lambda_1 - \lambda_2}{k\lambda_1 + \lambda_2} u_2 \circ \varphi, x < 0. \qquad (10)$$

При этом начальные условия в модельной задаче (5)–(7) определяются по формулам (10).

Таким образом, решив модельную задачу (5)–(7) по формулам (9) найдем решение задачи с внутренними граничными условиями.

Приведем алгоритм решения модельной задачи о нестационарной диффузии в области Ω.

1. Задание двумерной области Ω. Осуществляется при помощи иконки Boundary Mode.

2. Задание граничного условия. Нажмите кнопку $\partial\Omega$. Далее в меню Boundary и выберете пункт Specify Boundary Conditions. Введите данные условия Дирихле или Неймана.

3. Задание начальных условий. Для этого нажмите кнопку PDE Specification.

4. Задание конечно-элементной сетки. Триангуляция области может быть выполнена автоматически. Нажмите кнопку Mesh Mode. Это приводит к отображению используемой триангуляции области.

5. Задание уравнения. Зайдите в меню PDE и выберите пункт PDE Specification.

6. Для получения решения необходимо нажать кнопку Solve PDE.

7. Вы можете также увидеть график решения в виде поверхности. Нажмите кнопку Plot и установите в окне Plot Selection флаг Height (3-D plot).

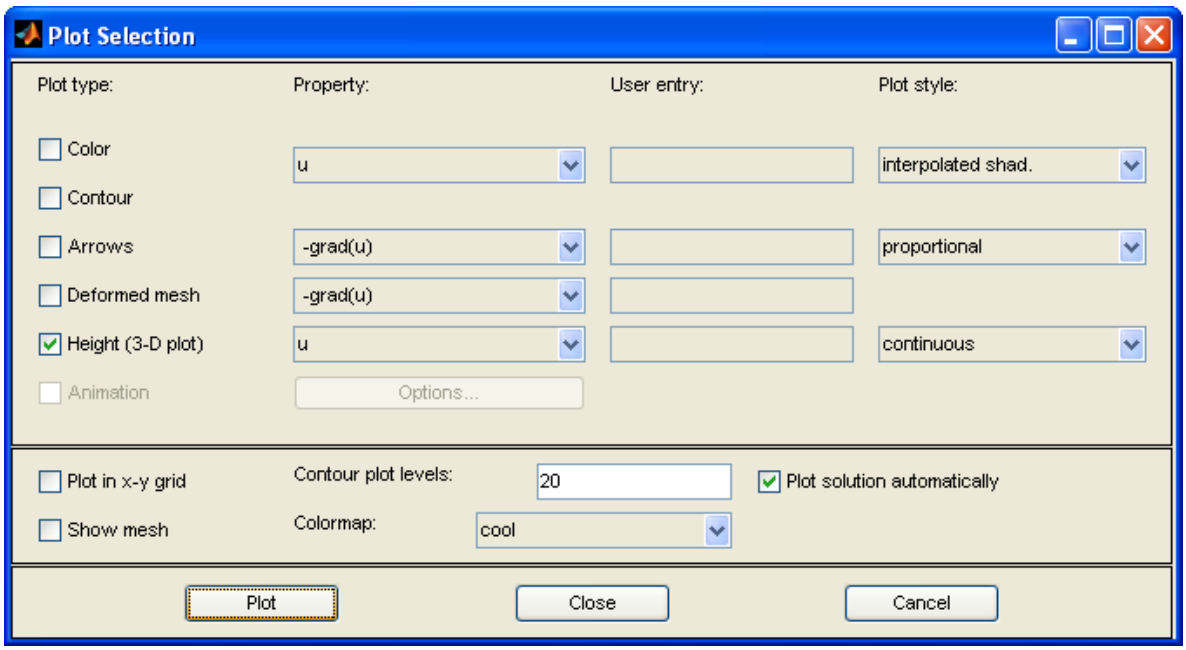


Рис. 1. Выбор средств визуализации решения

В этом случае график решения в данный момент времени будет представлен в виде поверхности.

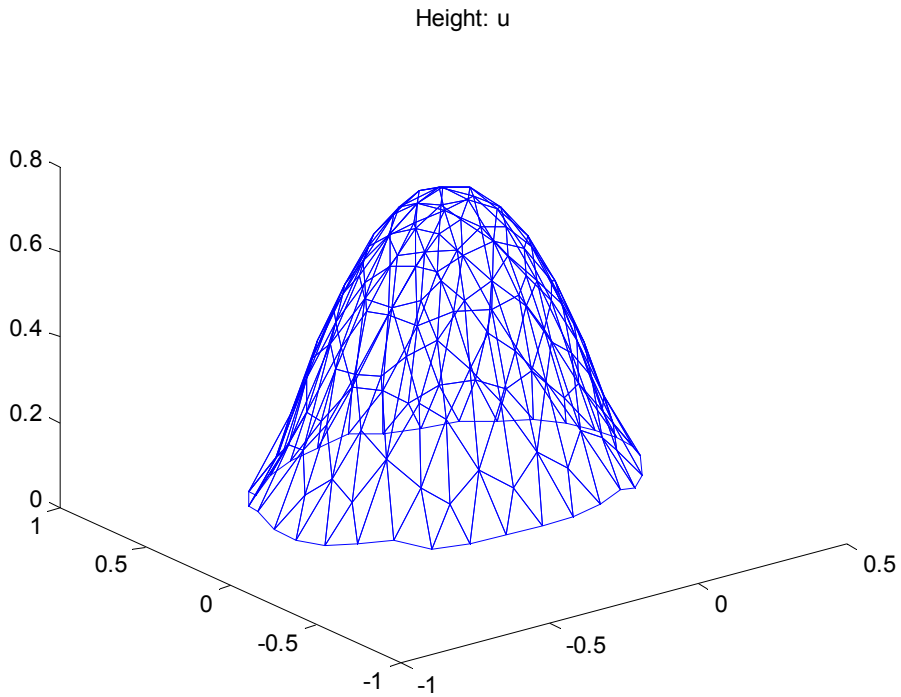


Рис.2. 3D-график решения

Если нажать кнопку Counter, то будут выведены линии уровня в данный момент времени. Выбор кнопки Animation инициирует запуск анимации. Другие возможности визуализации решения интуитивно понятны.

Замечание. Из формул (9) следует, что решение u_2 задачи при x>0 совпадает с решением модельной задачи. Учитывая, что $D_2 = \varphi^{-1}(D_1)$, где $\varphi^{-1}:(x,y)\to\left(-\frac{1}{k}x,y\right), k=\sqrt{\frac{d_1c_2}{d_2c_1}}, x<0$.

Аналогично сказанному, решение u_1 при x<0 можно получить из решения модельной задачи без дополнительных вычислений.

Библиографический список

1. Потемкин, В. Г. Вычисления в среде MATLAB / В. Г. Потемкин. – Москва : Диалог-МИФИ, 2004. – 720 с.

ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. А. Егорова, Н. Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: math.kudryashova@yandex.ru;
egorova.anastasiya262@yandex.ru

В данной работе исследуются и реализуются экономичные разностные схемы для уравнений параболического и гиперболического типа с двумя пространственными координатами.

Рассмотрим задачу Коши для двумерного дифференциального уравнения параболического типа в прямоугольной области:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad 0<t\le T,$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\ a\le x\le b,\ c\le y\le d, \qquad (1)$$

$$u(a,y,t)=f_1(y,t),\ u(b,y,t)=f_2(y,t),\ 0<t\le T,$$

$$u(x,c,t)=f_3(x,t),\ u(x,d,t)=f_4(x,t).$$

Выберем сетки узлов

$$x_m=a+\frac{b-a}{M}m,\ \ m=\overline{0,\mathrm{M}},\ \ h=\frac{b-a}{M},$$

$$y_n=c+\frac{d-c}{N}n,\ \ n=0,\ldots,N,\ \ l=\frac{d-c}{N},$$

$$t_p = p\frac{I}{P},\ \ p = \overline{0,P},\ \ \tau = \frac{I}{P}.$$

Будем искать приближенные значения сеточной функции $u_{mn}^p = u(x_m, y_n, t_p)$ решения задачи (1).

Наряду с задачей (1) рассмотрим две вспомогательные задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\ \ t_p < t \le t_{p+1}, \tag{2}$$

$$v(x, y, t_p) = u(x, y, t_p),\ a \le x \le b,\ \ c \le y \le d,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \ t_p < t \le t_{p+1},$$

$$w(x, y, t_p) = v(x, y, t_p),\ a \le x \le b,\ \ c \le y \le d. \tag{3}$$

Здесь $w(x, y, t_p) = u(x, y, t_p) + O(\tau^2)$.

Таким образом, если последовательно решить одномерные задачи (2) и (3), то получим значения функции $w(x, y, t_{p+1})$, которые отличаются от истинных значений $u(x, y, t_{p+1})$ – решения задачи (1) лишь на величину $O(\tau^2)$.

Рассмотрим неявную экономичную разностную схему расщепления для решения задачи (1).

Введем обозначения

$$\Lambda_{xx}(v_{mn}^p) = \frac{v_{m-1,n}^p - 2v_{mn}^p + v_{m+1,n}^p}{h^2},$$

$$\Lambda_{yy}(w_{mn}^p) = \frac{w_{m,n-1}^p - 2w_{mn}^p + w_{m,n+1}^p}{l^2}.$$

Тогда получим две разностные схемы

$$\frac{v_{mn}^{p+1} - v_{mn}^p}{\tau} = \Lambda_{xx}(v_{mn}^{p+1}),\ v_{mn}^p = u_{mn}^p\ ,\ n = \overline{0,N},\ \ p = \overline{0,P-1}. \tag{4}$$

$$\frac{w_{mn}^{p+1} - w_{mn}^p}{\tau} = \Lambda(w_{mn}^{p+1}),\ m = \overline{0,M},\ \ n = \overline{0,N},\ \ p = \overline{0,P-1}. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) образуют в совокупности неявную экономичную разностную схему расщепления для задачи (1).

Применим теперь к решению задачи (1) метод переменных направлений, а именно построим продольно-поперечную разностную схему

$$\frac{u_{mn}^{p+\frac{1}{2}} - u_{mn}^{p}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_{xx}(u_{mn}^{p+\frac{1}{2}}) + \Lambda_{yy}(u_{mn}^{p}), \qquad (6)$$

$$m = \overline{1, M-1},\ n = \overline{1, N-1},\ p = \overline{0, P-1},\ u_{mn}^{0} = \varphi(x_m, y_n),$$

$$\frac{u_{mn}^{p+1} - u_{mn}^{p+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_{xx}(u_{mn}^{p+\frac{1}{2}}) + \Lambda_{yy}(u_{mn}^{p+1}),\ m = \overline{1, M-1},\ n = \overline{1, N-1}, \qquad (7)$$

где $u_{mn}^{p+\frac{1}{2}} = u(x_m, y_n, t_p + \frac{\tau}{2}),\ p = \overline{0, P-1}.$

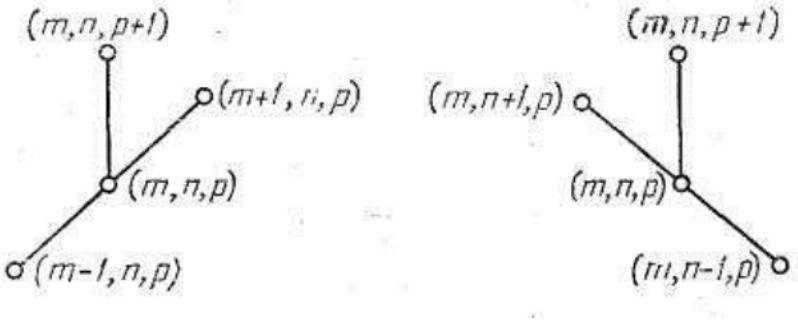


Рис. 1. Шаблон неявной разностной схемы

Таким образом, решение двумерной задачи (1) каждый раз сводится к решению цепочки двух одномерных задач.

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ 0 < t \le T,$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),\ a \le x \le b, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y),\ c \le y \le d.$$

Продольно – поперечная разностная схема для решения задачи (8) будет иметь следующий вид:

$$\frac{u_{mn}^{p+\frac{1}{2}} - 2u_{mn}^{p} + u_{mn}^{p-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2} = \Lambda_{xx}(u_{mn}^{p+\frac{1}{2}}) + \Lambda_{yy}(u_{mn}^{p}),\ p = \overline{1, P-1}, \qquad (9)$$

$$\frac{u_{mn}^{\frac{1}{2}} - u_{mn}^{0}}{\frac{\tau}{2}} = \psi(x_m, y_n) + \frac{\tau}{2}(\Lambda_{xx}(u_{mn}^{0}) + \Lambda_{yy}(u_{mn}^{0})),$$

$$m = \overline{1, M-1},\ n = \overline{1, N-1},\ u_{mn}^{0} = \varphi(x_m, y_n).$$

$$\frac{u_{mn}^{p+1} - 2u_{mn}^{p+\frac{1}{2}} + u_{mn}^{p}}{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2} = \Lambda_{xx}(u_{mn}^{p+1}) + \Lambda_{yy}(u_{mn}^{p+\frac{1}{2}}), \qquad (10)$$

$$p = \overline{1, P-1},\ m = \overline{1, M-1},\ n = \overline{1, N-1}.$$

Сначала пользуясь разностной схемой (9), находим вспомогательные значения сеточной функции на промежуточном временном слое с номером $p+\frac{1}{2}$, затем с помощью разностной схемы (10) находим значения сеточной функции во всех узлах по пространственным переменным на временном слое с номером $p+1$.

Для реализации всех разностных схем применяется метод разностной прогонки.

Решение модельных задач показало эффективность и точность рассмотренных разностных схем.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2},\ 0 < t \le 1,$$

с начальным условием:

$$u(x, y, 0) = \cos x \sin y\ ,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \qquad (11)$$

и условиями на границах области:

$$u(0, y, t) = e^{-2t} \sin y,\ u(\frac{\pi}{2}, y, t) = 0,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2},\ 0 < t \le 1; \qquad (12)$$

$$u(x, 0, t) = 0,\ u(x, \frac{\pi}{2}, t) = e^{-2t} \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 < t \le 1. \qquad (13)$$

Точным решением этой задачи является функция вида:

$$u = e^{-2t} \cos x \sin y.$$

К задаче (11)–(13) была применена разностная схема расщепления (4)–(5). Были найдены значения сеточной функции u_{mn}^{p}. В таблице 1

представлены значения абсолютной величины разности между точными значениями функции $u(x,y,t)$ и значениями сеточной функции в узлах сетки при $t=1$.

Таблица 1

Абсолютная величина разности

0	0	0	0	0	0	0
0	0.00717011	0.013272	0.0171588	0.0174946	0.0125716	0
0	0.00379019	0.00695878	0.0088664	0.00883759	0.00614428	0
0	0.00166785	0.00303122	0.0037914	0.00366888	0.00243775	0
0	0.00054444	0.00097015	0.0011689	0.00106102	0.00063145	0
0	0.00010125	0.00016958	0.00017889	0.00012087	2.5621e-05	0
0	5.8301e-18	1.1263e-17	1.5928e-17	1.9508e-17	2.1759e-17	2.2526e-17

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем : учеб. пособие / А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1977. – 657 с.

2. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

3. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1971. – 553 с.

СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

А. Н. Тында, К. А. Тимошенков

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: tyndaan@mail.ru; timoshenkov.ka@yandex.ru

Введение

В работе предлагается численный метод решения краевых задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа в произвольно заданной области в пространстве. Рассматриваемый метод основан на сведении краевых задач к граничным интегральным уравнениям (ГИУ), которые заданы на замкнутой поверхности, ограничивающей область задачи.

Такой подход исследовался разными авторами (см., например, [1–3]). Основным преимуществом данного подхода является снижение размерности задачи на единицу: от трехмерной краевой задачи осуществляется переход к двумерному интегральному уравнению.

Основной трудностью при использовании данного метода является решение получаемых ГИУ, которые в большинстве случаев не разрешимы аналитически. При этом такие интегральные уравнения содержат особенности в области интегрирования, что существенно усложняет их численное решение.

В данной работе предложен сплайн-коллокационный метод решения для ГИУ 2-го рода, содержащих слабые особенности; описан алгоритм численного решения краевых задач с помощью разработанного метода. Настоящее исследование является продолжением результатов, опубликованных в статье [4], в которой были рассмотрены краевые задачи на плоскости.

1. Постановки краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в произвольной области в R^3

Рассмотрим уравнение Лапласа в R^3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0, \quad x=(x_1,x_2,x_3)\in G. \tag{1}$$

где $G\in R^3$ – область задачи. Через Γ обозначим замкнутую поверхность, которая является границей области G.

На границе Γ будем рассматривать условия Дирихле и Неймана

$$u|_\Gamma = f(x) \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_x}\right|_\Gamma = g(x) \tag{3}$$

Через n_x и n_y обозначим внешние нормали к Γ в точках x и y соответственно.

Рассмотрим сведение к ГИУ внутренних краевых задач. Решение краевой задачи Дирихле представим в виде

$$u(x)=\int_\Gamma \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n_y}\psi(y)ds(y),\ x\in R^3\setminus\Gamma \tag{4}$$

плотность ψ определяем, решая интегральное уравнение

$$\psi(x)-2\int_\Gamma \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n_y}\psi(y)ds(y)=-2f(x),\ x\in\Gamma \tag{5}$$

Решение краевой задачи Неймана будем искать в виде

$$u(x)=\int_\Gamma \Phi(x,y)\varphi(y)ds(y),\ x\in R^3\setminus\Gamma \tag{6}$$

плотность φ определяем как решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) + 2\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n_x} \varphi(y) ds(y) = 2g(x),\ x \in \Gamma \qquad (7)$$

Функция $\Phi(x,y)$ есть фундаментальное решение уравнения (1), которое имеет вид

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{4\pi |x-y|},\quad |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

Можно показать, что если для поверхности Γ выполняются условия Ляпунова, то уравнения (5) и (7) являются слабосингулярными [1]. В рамках данной работы мы будем полагать, что Γ дважды непрерывно дифференцируема (и следовательно является поверхностью Ляпунова) и имеет параметрическое представление в виде:

$$\begin{cases} x_1 &= \alpha(\phi,\theta) \\ x_2 &= \beta(\phi,\theta)\ ,\ \phi \in [\phi_1,\phi_2],\ \theta \in [\theta_1,\theta_2] \\ x_3 &= \gamma(\phi,\theta) \end{cases} \qquad (8)$$

Вычислим единичную нормаль и поверхностный элемент для Γ, используя представление (8). Для этого рассмотрим векторы

$$x_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi} = \{\alpha'_\phi, \beta'_\phi, \gamma'_\phi\}$$

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = \{\alpha'_\theta, \beta'_\theta, \gamma'_\theta\}.$$

Данные векторы являются касательными к поверхности в точке x и порождают касательную плоскость в этой точке. Единичную нормаль к границе Γ в точке x определим с помощью векторного произведения x_ϕ и x_θ.

$$n_x(\phi,\theta) = \frac{[x_\phi, x_\theta]}{|[x_\phi, x_\theta]|} = \frac{1}{\sqrt{g}}[x_\phi, x_\theta] \qquad (9)$$

где $g = |[x_\phi, x_\theta]|^2$. При этом элемент поверхности в точке x определится соотношением:

$$ds(\phi,\theta) = |[x_\phi d\phi, x_\theta d\theta]| = \sqrt{g}\, d\phi d\theta \qquad (10)$$

Используя параметрическое представление (8), в соотношениях (5)-(7) перейдем от интегралов по поверхности к двойным интегралам. Найдем производные

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial n_y} = \nabla\Phi\cdot n_y = \frac{1}{4\pi|x-y|^3}\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)n_y^i = \frac{(x-y,n_y)}{4\pi|x-y|^3}.$$

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial n_x} = \nabla\Phi\cdot n_x = \frac{1}{4\pi|x-y|^3}\sum_{i=1}^{3}(y_i-x_i)n_x^i = \frac{(y-x,n_x)}{4\pi|x-y|^3}.$$

Уравнение (5) приведем к виду:

$$\psi(\phi,\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{(x(\phi,\theta)-y(u,v),n_y(u,v))}{|x(\phi,\theta)-y(u,v)|^3}\psi(u,v)ds(u,v) = -2f(\phi,\theta) \quad (11)$$

Уравнение (7) приведем к виду:

$$\varphi(\phi,\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{(y(u,v)-x(\phi,\theta),n_x(\phi,\theta))}{|x(\phi,\theta)-y(u,v)|^3}\varphi(u,v)ds(u,v) = 2g(\phi,\theta) \quad (12)$$

Решение задачи Дирихле (4) примет вид

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{(x-y(u,v),n_y(u,v))}{|x-y(u,v)|^3}\psi(u,v)ds(u,v) \quad (13)$$

Аналогично решение задачи Неймана (6) запишем в виде

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{|x-y(u,v)|}\varphi(u,v)ds(u,v) \quad (14)$$

Уравнения (11)-(12) представляют собой двумерные слабосингулярные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Интегралы (13)-(14) не содержат особенности в точке x, т.к. их вычисление осуществляется внутри области G и точка x не попадает на границу Γ.

2. Численный метод решения ГИУ

Построим численный метод решения слабосингулярных уравнений (11)-(12), используя подход, описанный в работе [5]. Рассмотрим двумерное интегральное уравнениям Фредгольма второго рода, заданное в прямоугольной области $D:\{a_1 \le x_1 \le a_2; b_1 \le x_2 \le b_2\}$

$$\phi(x_1,x_2) - \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}H(x_1,x_2,s_1,s_2)\phi(s_1,s_2)ds_1ds_2 = f(x_1,x_2) \quad (15)$$

где ядро H содержит слабую особенность

$$H(x_1,x_2,s_1,s_2)=\frac{A(x_1,x_2,s_1,s_2)}{((x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1;$$

$A(x_1,x_2,s_1,s_2)$ – непрерывная функция.

Неизвестное решение $\phi(x_1,x_2)$ аппроксимируем с помощью сплайна $T(x_1,x_2)$. Для этого область D разобьем на подобласти Δ_{ij}

$$\Delta_{ij}=\{d_1^i\le x_1\le d_1^{i+1};d_2^j\le x_2\le d_2^{j+1}\}$$

$$d_1^i=a_1+\frac{a_2-a_1}{N_1}i,\quad i=\overline{0,N_1}\qquad d_2^j=b_1+\frac{b_2-b_1}{N_2}j,\quad j=\overline{0,N_2}$$

В каждой из областей Δ_{ij} аппроксимируем функцию $\phi(x_1,x_2)$ интерполяционным полиномом Лагранжа $L_{ij}(x_1,x_2)$, который построим по узлам $x_{ij}^{kp}\in\Delta_{ij},k,p=\overline{1,R}$. В качестве узлов будем использовать систему из R узлов Гаусса-Лежандра $\xi^k,k=\overline{1,R}$, которые мы спроецируем в область Δ_{ij}, тогда сетка узлов определится следующим образом:

$$x_{ij}^{kp}=(x_{ik}^1,x_{jp}^2)=\left\{\frac{d_1^i-d_1^{i-1}}{2}\xi^k+\frac{d_1^i+d_1^{i-1}}{2};\frac{d_2^j-d_2^{j-1}}{2}\xi^p+\frac{d_2^j+d_2^{j-1}}{2}\right\}\quad(16)$$

$$i=\overline{1,N_1};j=\overline{1,N_2};k,p=\overline{1,R}.$$

Полином Лагранжа, аппроксимирующий решение в области Δ_{ij} записывается в виде

$$L_{ij}(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{R}\sum_{p=1}^{R}\phi_{ij}^{kp}\psi_k^1(x_1)\psi_p^2(x_2)\qquad(17)$$

где $\phi_{ij}^{kp}=\phi(x_{ik}^1,x_{jp}^2)$ – неизвестные коэффициенты полинома; ψ_k^1 – фундаментальный полином, построенный по узлам x_{ik}^1; ψ_p^2 – фундаментальный полином, построенный по узлам x_{jp}^2.

$$\psi_k^1(x_1)=\prod_{l=1,l\ne k}^{R}\frac{x_1-x_{il}^1}{x_{ik}^1-x_{il}^1};\quad \psi_p^2(x_2)=\prod_{l=1,l\ne k}^{R}\frac{x_2-x_{jl}^2}{x_{jp}^2-x_{jl}^2}$$

В исходное уравнение (15) вместо функции $\phi(x_1,x_2)$ подставим сплайн $T(x_1,x_2)$ и приравняем левую и правую часть уравнения в узлах (x_{ik}^1,x_{jp}^2), получим

$$T(x_{ik}^1, x_{jp}^2) - \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} H(x_{ik}^1, x_{jp}^2, s_1, s_2)T(s_1, s_2)ds_1 ds_2 = f(x_{ik}^1, x_{jp}^2)$$

Теперь разобьем интеграл на сумму интегралов по областям Δ_{ij} и, учитывая что $T(x_{ik}^1, x_{jp}^2) = L_{ij}(x_{ik}^1, x_{jp}^2) = \phi_{ij}^{kp}$, перепишем предыдущее соотношение в виде:

$$\phi_{ij}^{kp} - \sum_{q=1}^{N_1}\sum_{s=1}^{N_2} \int_{d_1^{q-1}}^{d_1^q} \int_{d_2^{s-1}}^{d_2^s} H(x_{ik}^1, x_{jp}^2, s_1, s_2)L_{qs}(s_1, s_2)ds_1 ds_2 = f(x_{ik}^1, x_{jp}^2) \quad (18)$$

Подставим (17) в (18) и меняя порядок суммирования и интегрирования получим

$$\phi_{ij}^{kp} - \sum_{q=1}^{N_1}\sum_{s=1}^{N_2}\sum_{t=1}^{R}\sum_{u=1}^{R}\phi_{qs}^{tu} \int_{d_1^{q-1}}^{d_1^q} \int_{d_2^{s-1}}^{d_2^s} H(x_{ik}^1, x_{jp}^2, s_1, s_2)\times$$

$$\times\psi_t^1(s_1)\psi_u^2(s_2)ds_1 ds_2 = f(x_{ik}^1, x_{jp}^2) \quad (19)$$

Выражение (19) представляет собой систему линейных уравнений размера $N_1 N_2 R^2$ относительно неизвестных коэффициентов ϕ_{ij}^{kp}. Перепишем (19) в виде

$$\phi_{ij}^{kp} - \sum_{q=1}^{N_1}\sum_{s=1}^{N_2}\sum_{t=1}^{R}\sum_{u=1}^{R}\phi_{qs}^{tu} I_{qs}^{tu}(x_{ik}^1, x_{jp}^2) = f(x_{ik}^1, x_{jp}^2); \quad (20)$$

$$k, p = \overline{1, R}, i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}$$

где коэффициенты системы выпишем отдельно

$$I_{qs}^{tu}(x_{ik}^1, x_{jp}^2) = \int_{d_1^{q-1}}^{d_1^q} \int_{d_2^{s-1}}^{d_2^s} H(x_{ik}^1, x_{jp}^2, s_1, s_2)\psi_t^1(s_1)\psi_u^2(s_2)ds_1 ds_2 \quad (21)$$

Интеграл (21) является сингулярным, если $q = i$ и $s = j$; в этом случае для его вычисления используем специальную кубатурную формулу. Если $q \neq i$ или $s \neq j$, то интеграл (21) не содержит особенностей и для его вычисления можно использовать любую кубатурную формулу.

Кубатурная формула

Рассмотрим слабосингулярный интеграл вида, который задан в прямоугольной области $B = \{a_1 \le x_1 \le a_2; b_1 \le x_2 \le b_2\}$

$$\Phi(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{K(x_1, x_2, s_1, s_2) ds_1 ds_2}{((x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2)^{\alpha}} \tag{22}$$

Интеграл содержит особенность в точке $(x_1 = s_1, x_2 = s_2)$, что нужно учитывать при построении квадратурной формулы для его вычисления. Построим специальную неравномерную сетку, сгущающуюся к точке (x_1, x_2). По переменной x_1 построим сетку узлов вида:

$$\begin{cases} s_k^1 = x_1 - (x_1 - a_1)\left(\dfrac{k}{M_1}\right)^v; \quad k = \overline{1, M_1} \\ s_k^2 = x_1 + (a_2 - x_1)\left(\dfrac{k}{M_2}\right)^v; \quad k = \overline{1, M_2} \end{cases}$$

Для переменной x_2 строим аналогичную систему узлов:

$$\begin{cases} s_k^3 = x_2 - (x_2 - b_1)\left(\dfrac{k}{M_1}\right)^v; \quad k = \overline{1, M_1} \\ s_k^4 = x_2 + (b_2 - x_2)\left(\dfrac{k}{M_2}\right)^v; \quad k = \overline{1, M_2} \end{cases}$$

Параметр v определяет степень сгущения сетки; его следует выбирать, исходя из гладкости функции $K(x_1, x_2, s_1, s_2)$. Теоретические оценки для v можно найти в работе [5].

Заметим, что если $|x_1 - a_1| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число, то систему узов s_k^1 строить нецелесообразно и данные узлы следует отбросить. С другой стороны, если $|x_1 - a_1| < \varepsilon$, то нужно отбросить узлы s_k^2. Аналогично будем поступать и с узлами s_k^3 и s_k^4 по переменной x_2.

Построенная сетка узлов разбивает область B на прямоугольные подобласти B_{ij} (см. рисунок 1). При этом особая точка попадает в только в одну область при $i = j = M_1$, а во всех остальных областях особенностей нет. Область, содержащую особенность будем обозначать B^*. На рисунке 1 область B^* выделена красным цветом. Системы узлов по обеим переменным состоят из двух частей, что усложняет

нумерацию, поэтому в дальнейшем, абстрагируясь от конкретного вида сетки, будем рассматривать узлы в общем виде

$$B_{ij} = \{s_i^1 \le s_1 \le s_{i+1}^1; s_j^2 \le s_2 \le s_{j+1}^2\}, \quad i = \overline{1, M_1 + M_2}, j = \overline{1, M_1 + M_2}.$$

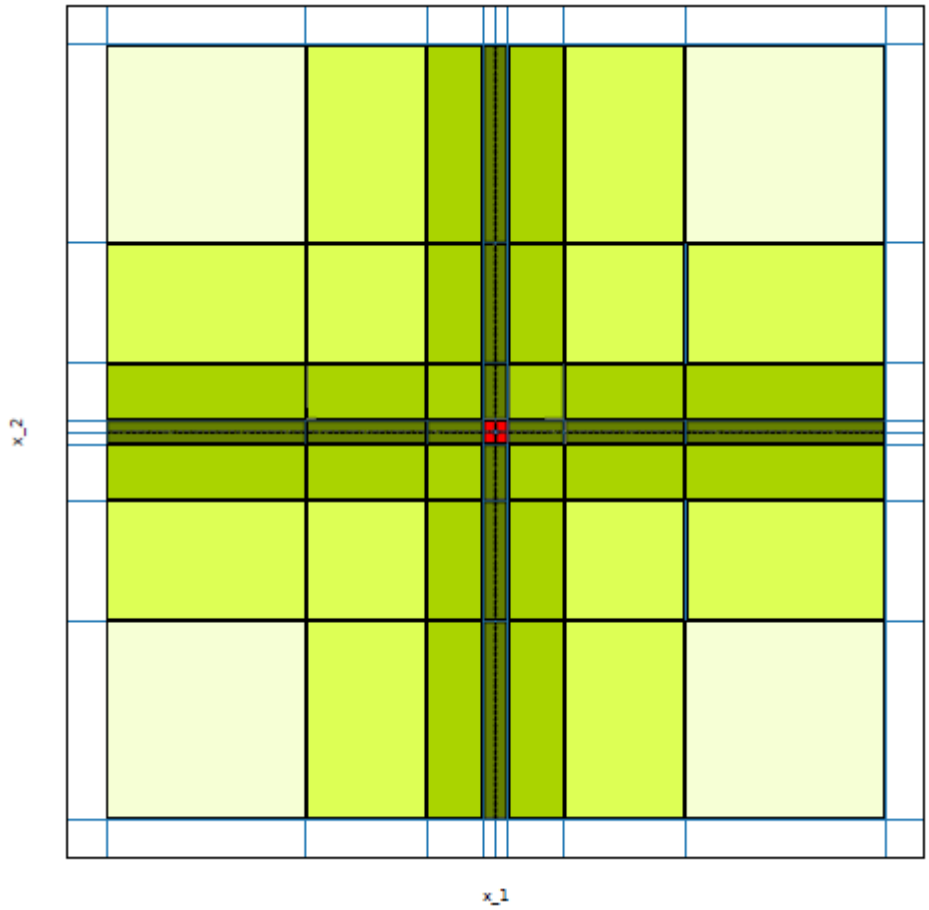


Рис. 1. Разбиение области B неравномерной сеткой

Обозначим через $F(x_1, x_2, s_1, s_2)$ подынтегральную функцию в интеграле (22) и разобьем данный интеграл на сумму интегралов по прямоугольникам B_{ij}:

$$\begin{aligned} \iint_B F(x_1, x_2, s_1, s_2) ds_1 ds_2 &= \sum_{i,j} \iint_{B_{ij}} F(x_1, x_2, s_1, s_2) ds_1 ds_2 = \\ = \sum_{i,j; i,j \neq M_1} \iint_{B_{ij}} F(x_1, x_2, s_1, s_2) ds_1 ds_2 &+ \iint_{B^*} F(x_1, x_2, s_1, s_2) ds_1 ds_2, \end{aligned} \tag{23}$$

Поскольку особенность локализована в области B^*, в выражении (23) интеграл по области B^* записан отдельно от суммы. Для вычисления этого интеграла будем использовать формулу левых прямоугольников; остальные интегралы, стоящие под знаком суммы,

можно вычислять по любой квадратурной формуле. В данном случае применим формулу Гаусса:

$$\iint\limits_{B_{ij}} F(x_1,x_2,s_1,s_2)ds_1ds_2 = \frac{s_i^1 - s_{i-1}^1}{2}\frac{s_j^2 - s_{j-1}^2}{2}\sum_{k=1}^{Q}\sum_{p=1}^{Q} g_k g_p F(x_1,x_2,\xi_k^1,\xi_p^2) \quad (24)$$

где Q – число узлов формулы Гаусса, g_k, g_p – весовые коэффициенты формулы, ξ_k^1, ξ_p^2 – узлы Гаусса ξ_l, спроецированные на отрезки $[s_{i-1}^1, s_i^1]$ и $[s_{j-1}^2, s_j^2]$ соответсвенно:

$$\xi_k^1 = \frac{s_i^1 + s_{i-1}^1}{2} + \frac{s_i^1 - s_{i-1}^1}{2}\xi_k, \quad \xi_p^2 = \frac{s_j^2 + s_{j-1}^2}{2} + \frac{s_j^2 - s_{j-1}^2}{2}\xi_p.$$

3. Численные результаты

Задачи Дирихле и Неймана внутри эллипсоида

В качестве модельного примера рассмотрим краевые задачи внутри эллипсоида с полуосями $a = 0.5, b = 0.6, c = 0.8$. Эллипсоид запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x_1 &= a\cos(\phi)\cos(\theta) \\ x_2 &= b\cos(\phi)\sin(\theta) \\ x_3 &= c\sin(\phi) \end{cases}, \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi] \quad (25)$$

Точное решение u выберем следующим образом:

$$u(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1 - x_2}\cos(\sqrt{2}x_3) - 1$$

Значения приближенного решения будем вычислять в контрольных точках $c_{i,j,k} = (x^*_{i,j,k}, y^*_{i,j,k}, z^*_{i,j,k})$, которые будем генерировать по правилу

$$\begin{cases} x^*_{i,j,k} &= \rho_i a\cos(\phi_j)\cos(\theta_k) \\ y^*_{i,j,k} &= \rho_i b\cos(\phi_j)\sin(\theta_k) \\ z^*_{i,j,k} &= \rho_i c\sin(\phi_j) \end{cases} \quad (26)$$

где

$$\rho_i = \frac{i+1}{M+1}, \quad i = \overline{0, M-1}, \quad \phi_j = -\frac{\pi}{2} + j\frac{\pi}{N}, \quad j = \overline{0, N-1},$$

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{K}, \quad k = \overline{0, K-1}$$

Данные точки заведомо попадают внутрь эллипсоида (25), т.к. по определению расположены на эллипсоидах с меньшими полуосями $\rho_i a < a; \rho_i b < b; \rho_i c < c$, поскольку $0 < \rho_i < 1$. Система (26) задает множество из $M \times N \times K$ точек, расположенных внутри области задачи.

Абсолютную погрешность определим в C-норме по формуле

$$e_C = \max_{i,j,k} \left| u(c_{i,j,k}) - u^*(c_{i,j,k}) \right| \qquad (27)$$

где u^* – приближенное решение.

Укажем параметры квадратурной формулы для вычисления интегралов (21): число разбиений $M_1 = M_2 = 8$, число узлов Гаусса $Q = 7$, степень сгущения сетки $v = 6$. Параметры сплайна T: N_1, N_2 – число полиномов по переменным ϕ, θ. Каждый интерполяционный полином содержит $R \times R$ узлов Гаусса. Мы выберем $R = 6$.

В таблице 1 приведены значения погрешности e_C решения внутренних краевых задач Дирихле и Неймана. Зависимость величины e_C от числа полиномов N_1, N_2 показана на графиках.

Таблица 1

Абсолютная погрешность

N_1, N_2	Задача Дирихле	Задача Неймана
$N_1 = 2, N_2 = 2$	5.076360e-04	8.477716e-04
$N_1 = 3, N_2 = 3$	6.298979e-05	4.138852e-05
$N_1 = 4, N_2 = 4$	1.800035e-05	1.730465e-06
$N_1 = 5, N_2 = 5$	1.550985e-06	1.672900e-06
$N_1 = 6, N_2 = 6$	1.602531e-07	2.758019e-07

Заключение

Из графиков 2-3 можно сделать вывод о сходимости численного метода в смысле нормы (27). Однако, при численных экспериментах не удалось получить погрешность, меньшую, чем 10^{-7}, поскольку были выбраны недостаточно большие значения M_1, M_2, N_1, N_2. Дальнейшее увеличение этих параметров требует существенных вычислительных ресурсов. В связи с этим возникает вопрос о выборе оптимального соотношения параметров кубатурных формул для вычисления интегралов и параметров сплайна, аппроксимирующего решение ГИУ. Вместес с тем, проведенные численные эксперименты и полученные результаты позволяют утверждать, что метод ГИУ для решения краевых задач имеет ряд преимуществ перед классическими сеточными методами, особенно в случае областей нестандартной формы.

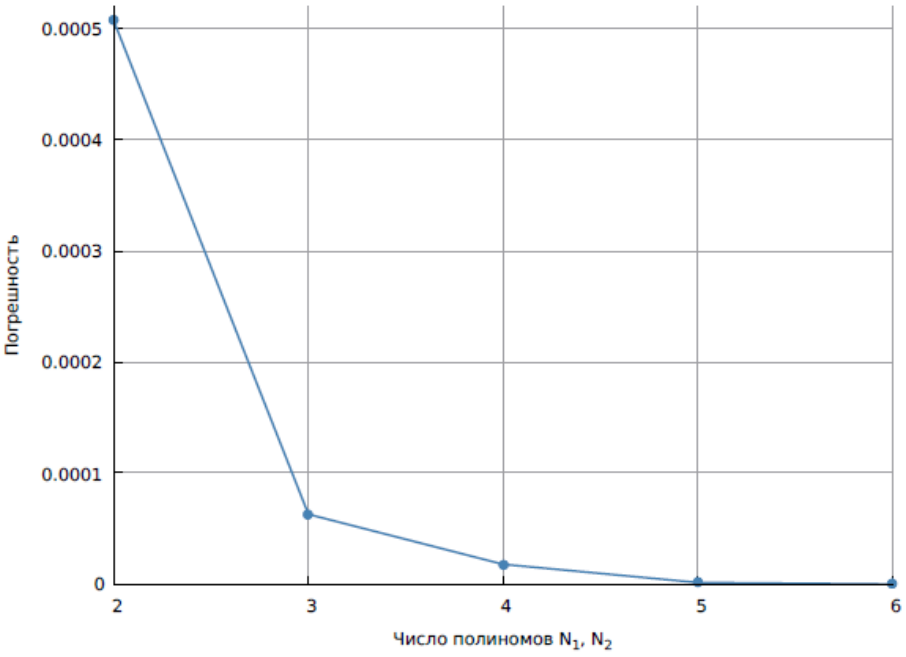


Рис. 2. Задача Дирихле: зависимость погрешности e_C от N_1, N_2

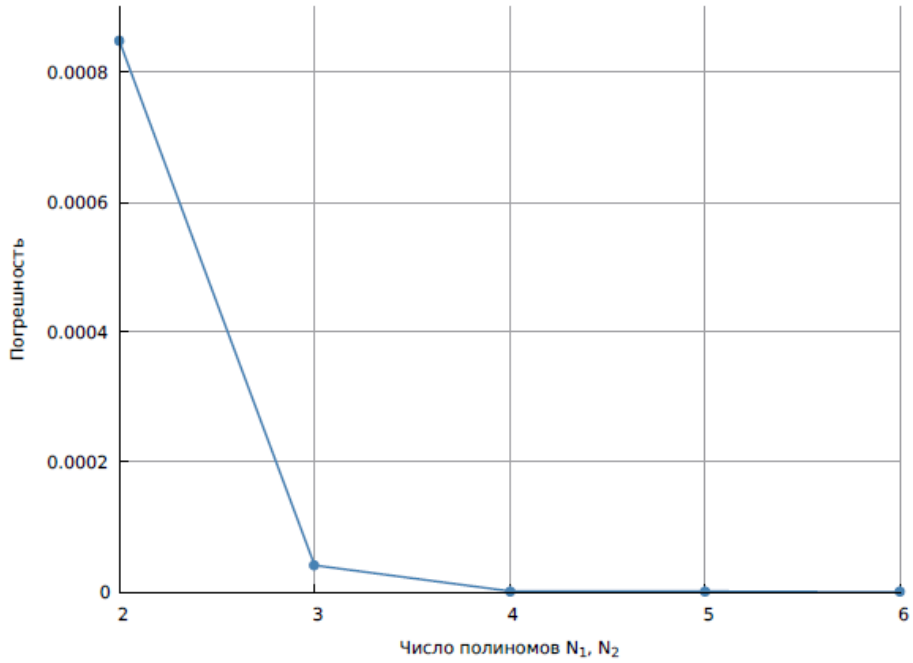


Рис. 3. Задача Неймана: зависимость погрешности e_C от N_1, N_2

Библиографический список

1. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния : пер. с англ. / Д. Колтон, Р. Кресс. – Москва : Мир, 1987. – 311 с.

2. Владимиров, В. С. Уранения математической физики / В. С. Владимиров. – Москва : Наука, 1981. – 512 с.

3. Krutitskii, P. A. Hypersingular integral equations not needed in the impedance problem in scattering theory / P. A. Krutitskii // J. Computers and Mathematics with Applications. – 2003. – № 45. – P. 391–399.

4. Тында, А. Н. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в сложных областях методом граничных интегральных уравнений / А. Н. Тында, К. А. Тимошенков // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 28–31 мая 2018 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза, 2018. – С. 124–136.

5. Tynda, A. N. Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations / A. N. Tynda // Труды Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 68–78.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА

Ш. С. Хубежты, З. В. Бесаева*

Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН,
г. Владикавказ, Республика Северная Осетия-Алания;
Северо-Осетинский государственный университет
имени К. Л. Хетагурова,
г. Владикавказ, Республика Северная Осетия-Алания;
*Юго-Осетинский государственный университет
имени А. А. Тибилова,
г. Цхинвал, Республика Южная Осетия
E-mail: shalva57@rambler.ru

Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений являются активно развивающимся направлением вычислительной математики. Это связано с многочисленными приложениями сингулярных интегральных уравнений в математической теории упругости, гидро и аэро-динамики, электродинамики, физики и с тем обстоятельством, что аналитическое решение таких уравнений возможны лишь в исключительных случаях.

Основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. Но во многих случаях требуется получить аналитические приближенные решения. К этому типу методов принадлежат разработанные для интегральных уравнений [1] методы, связанные с многочленами Чебышева. В данной статье мы будем применять многочлены Лежандра для общего сингулярного интегрального уравнения второго рода.

Итак, рассматривается сингулярное интегральное уравнение вида

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt + \int_{-1}^{1} K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad (-1<x<1), \qquad (1)$$

где $K(x,t)$ и $f(x)$ – данные непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[-1;1]$, $\varphi(t)$ – неизвестная функция.

Как известно [2, 3], на отрезке $[-1;1]$ по весовой функции $p(x)=1$ ортогональными многочленами являются многочлены Лежандра

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n. \tag{2}$$

Для таких многочленов справедливы формулы

$$\int_{-1}^{1}P_n(t)P_m(t)\,dt=\begin{cases}0, \text{если } m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, \text{если } m=n.\end{cases}$$

Тогда многочлены $\hat{P}_n(t)=\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}P_n(t)$ будут ортонормированными многочленами на отрезке $[-1;1]$, т. е.

$$\int_{-1}^{1}\hat{P}_n(t)\hat{P}_m(t)\,dt=\begin{cases}0, \text{если } m\neq n,\\ 1, \text{если } m=n.\end{cases} \tag{3}$$

Теперь представим неизвестную функцию $\varphi(t)$ в ряд по ортонормированным многочленам Лежандра. Имеем

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\hat{P}_k(t), \tag{4}$$

где a_k $(k=0,1,2,\ldots)$ – неизвестные, так как функция $\varphi(t)$ – неизвестная.

Разложим также функции $K(x,t)$ и $f(x)$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\hat{P}_k(t), \quad \text{где } d_k=\int_{-1}^{1}f(t)\hat{P}_k(t)\,dt, \tag{5}$$

$$K(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i(x)\hat{P}_i(t), \quad \text{где } c_i(x)=\int_{-1}^{1}K(x,t)\hat{P}_i(t)\,dt.$$

Разложим дальше $c_i(x)$ $(i=0,1,2,\ldots)$ в ряд по многочленам Лежандра. Будем иметь

$$c_i(x)=\sum_{l=0}^{\infty}c_{il}\hat{P}_l(x), \quad \text{где } c_{il}=\int_{-1}^{1}c_i(x)\hat{P}_l(x)dx.$$

Следовательно, для $K(x,t)$ имеем разложение

$$K(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}c_{il}\hat{P}_l(x)\right)\hat{P}_i(t). \qquad (6)$$

Подставляя (4), (5) и (6) в (1), получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{t-x}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\hat{P}_k(t)\,dt+$$

$$+\int_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}c_{il}\hat{P}_l(x)\right)\hat{P}_i(t)\sum_{k=0}^{\infty}a_k\hat{P}_k(t)\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\hat{P}_k(x).$$

Известно, что построенные ряды равномерно сходятся, так как $K(x,t)$ и $f(x)$ непрерывно-дифференцируемые функции [1, стр. 112], поэтому мы можем поменять порядок суммирования и получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_{-1}^{1}\frac{\hat{P}_k(t)}{t-x}dt+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\sum_{i=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}\hat{P}_i(t)\hat{P}_k(t)dt\sum_{l=0}^{\infty}c_{il}\hat{P}_l(x)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\hat{P}_k(x).$$

Учитывая ортонормированность многочленов $\hat{P}_i(t)$ $(i=0,1,\ldots)$ и формулу (2), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kQ_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{l=0}^{\infty}c_{kl}\hat{P}_l(x)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\hat{P}_k(x), \qquad (7)$$

где

$$Q_k(x)=\int_{-1}^{1}\frac{\hat{P}_k(t)}{t-x}dt.$$

Разложим $Q_k(x)$ также по многочленам $\hat{P}_i(x)$ $(i=0,1,\ldots)$

$$Q_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_{ki}\hat{P}_i(x),$$

где

$$b_{ki}=\int_{-1}^{1}Q_k(x)\hat{P}_i(x)\,dx.$$

Подставляя в (7), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{i=0}^{\infty}b_{ki}\hat{P}_i(x)+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{l=0}^{\infty}c_{kl}\hat{P}_l(x)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\hat{P}_k(x). \qquad (8)$$

Перепишем равенство (8) так

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_i b_{ik}\right)\hat{P}_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}a_l c_{lk}\right)\hat{P}_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\hat{P}_k(x).$$

Из этого равенства следует

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i b_{ik}+\sum_{l=0}^{\infty}a_l c_{lk}=d_k \qquad (k=0,1,2,\ldots). \tag{9}$$

Получили бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $a_0, a_1, a_2, \ldots$

В системе (9) коэффициенты b_{ik}, c_{ik}, d_k $(i,k=1,2,\ldots)$ можно вычислять приближенно с использованием квадратурных формул Гаусса [3], т. е. наивысшей алгебраической степени точности.

Для приближенного решения системы (9) получаем

$$\sum_{i=0}^{n}(b_{ik}+c_{ik})a_i=d_k \qquad (k=0,1,\ldots,n). \tag{10}$$

Она является системой $n+1$-го порядка с $n+1$ неизвестным. Решая эту систему относительно неизвестных $a_0, a_1, a_2, \ldots$, получаем приближенное решение

$$\varphi(x)\approx\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{P}_k(x). \tag{11}$$

Для обоснования построенной вычислительной схемы с использованием общей теории приближенных методов [4, 6] справедливо утверждение

Теорема. *Пусть уравнение* (1) *имеет единственное,* $K(x,t)$ *и* $f(x)$ *– дифференцируемые функции до порядка* $r-1$ *и производные порядка* r *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* $0<\alpha\le 1$. *Тогда полученная система* (10) *имеет единственное решение и для приближенного решения* (11) *справедлива оценка*

$$\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\le O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \qquad -1<x<1.$$

В конце хочу отметить трудности с использованием выше предлагаемого метода. Дело в том, что многочлены Лежандра большого порядка сложно описываются. Кроме того, для приближенного вычисления коэффициентов разложения с использованием квадратурных формул Гаусса коэффициенты и узлы не выражаются аналитически. Для них со-

ставлены таблицы и мы будем пользоваться этими таблицами, а это связано с некоторыми неудобствами.

Библиографический список

1. Пашковский, С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – Москва : Наука, 1983. – 384 с.

2. Сеге, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – Москва : Физматгиз, 1962. – 500 с.

3. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – Москва : Наука, 1967. – 500 с.

4. Хубежты, Ш. С. Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения, не ограниченного на концах интегрирования, с применением рядов Чебышева / Ш. С. Хубежты, З. В. Бесаева // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2017. – Т. 2. – С. 26–31.

5. Бойков, И. В. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, М. А. Семов // Известия высших учебных заведений. Приволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 11–27.

6. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 720 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ГИББСА

А. А. Чевтаев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: math@pnzgu.ru

Введение

В конце 1898 – начале 1899 годов великий американский физик Джозайа Уиллард Гиббс (1839–1903), один из основоположников статистической механики, профессор математической физики на факультете философии и изящных искусств Йельского университета (США), являющийся тонким знатоком и ценителем математики, опубликовал в английском общенаучном журнале “Nature (Природа)” (издаётся с 1869 г.) две небольших заметки [1] и [2], в которых показал, что ряд Фурье не всегда представляет разлагаемую функцию с должной точностью. Редакция журнала, как и сам Гиббс, не знали, что этот результат - ряд Фурье разрывной функции не сходится к разлагаемой функции в окрестности разрыва - уже был опубликован Г. Уилбрагамом за 50 лет до этого [3], и за этим явлением установилось название: «Явление Гиббса».

Явление Гиббса для функций одной переменной

Рассмотрим явление Гиббса на частном случае разрывной функции [4, с. 91–93].

$$f(t)=sign(t)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi<t<0,\\ 0 \text{ при } t=0,\\ +1 \text{ при } 0<t<\pi,\end{cases} \qquad (1)$$

продолженной с периодом 2π на всю ось (см. рис. 1).

Функция (1) является нечётной, поэтому её разложение в ряд Фурье будет содержать только синусы:

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mt, \qquad (2)$$

где коэффициенты разложения b_m определяются, с учётом (1), выражениями [5, с. 418, формула (12)]

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin mt\,dt=\frac{2}{\pi}\frac{1-cos\pi m}{m}=\frac{2}{\pi m}[1-(-1)^m]$$

т.е. в разложении (2) отличны от нуля только члены с нечётными номерами m = 2n − 1 и, следовательно, ожидается, что разложение в ряд Фурье сходится к функции $f(t)$:

$$f(t)=\lim_{N\to\infty} S_N(t),$$

где $S_N(t)$ – сумма первых N ненулевых членов ряда Фурье:

$$S_N(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}. \qquad (3)$$

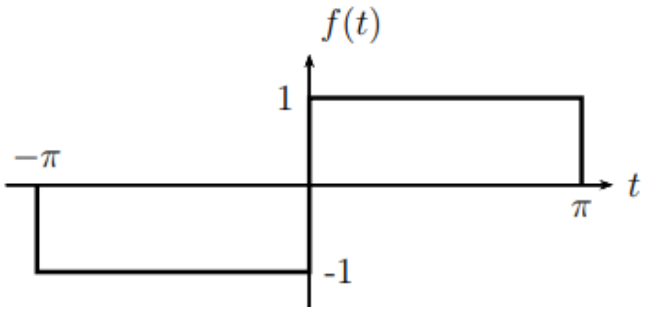


Рис. 1. Периодическая функция (1), разлагаемая в ряд Фурье (2)

Характер приближения функции (1) частичными суммами (3) её ряда Фурье изображён на рис. 2.

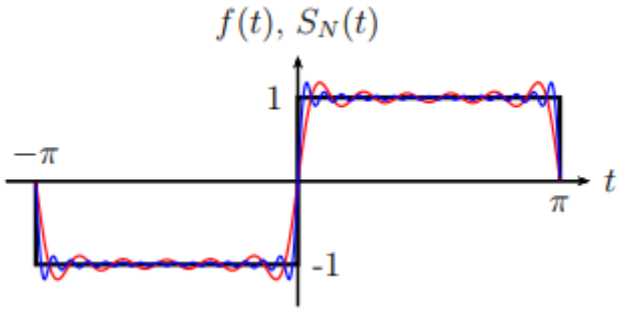


Рис. 2. Разлагаемая функция (1) и частичные суммы S_6 и S_{15} её ряда Фурье (3)

Как видно из рис. 2 частичные суммы S_N осциллируют вблизи значений ±1 разлагаемой функции. Исследуем, как ведут себя экстремумы $S_N(t)$ (в которых S_N наиболее отклоняется от разлагаемой функции) при N→∞. Производная частичной суммы $S_N(t)$, с учётом формулы Эйлера $e^{i\alpha} = cos\alpha + isin\alpha$ (i – мнимая единица) и формулы для суммы геометрической прогрессии (с начальным членом e^{it} и знаменателем e^{i2t}) преобразуется к виду

$$\frac{\partial S_N}{\partial t} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(2n-1)t = \frac{4}{\pi}\mathrm{Re}(\sum_{n=1}^{N} e^{i(2n-1)t}) = \frac{4}{\pi}\mathrm{Re}(e^{it}\frac{e^{i2Nt}-1}{e^{i2t}-1}) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\mathrm{Re}(e^{iNt}\frac{e^{iNt}-e^{-iNt}}{e^{it}-e^{it}}) = \frac{4}{\pi}\mathrm{Re}(e^{iNt}\frac{\sin Nt}{\sin t}) = \frac{4}{\pi}\frac{\cos Nt\sin Nt}{\sin t} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2Nt}{\sin t}$$

и, следовательно, точки экстремумов S_N удовлетворяют уравнению $sin\,2Nt = 0$ (кроме $t = 0$) и при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ (картины при $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$, как и при $-\pi \le t \le 0$, полностью симметричны и могут отдельно не рассматриваться) равны:

$$t_n = \frac{\pi}{2N}n, \quad n = 1,\ldots N. \tag{4}$$

Интегрируя, получим выражение для $S_N(t)$ (3) в интегральной форме, что для её экстремумов, с учётом (4), даёт:

$$S_N(t_T) = \frac{2}{\pi}\int_0^{t_n}\frac{\sin 2Nt}{\sin t}dt = [\tau = 2Nt] = \frac{1}{\pi N}\int_0^{t_n}\frac{\sin\tau}{\sin\frac{\tau}{2N}} =$$

$$= \int_0^{\pi n}(\frac{2}{\pi}\frac{\sin\tau}{\tau} + \frac{\tau\sin\tau}{12\pi N^2} + O(N^{-4}))d\tau = \frac{2}{\pi}Si(\pi n) - \frac{(-1)^n}{12}\frac{n}{N^2} + O(\frac{n}{N^4})$$

где $Si(x)$ – интегральный синус [4, с.356 – 357], рис.3:

$$Si(x) \equiv \int_0^x \frac{sint}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{cosx}{x} + O\left(x^{-2}\right) \; при \; x \to \infty$$

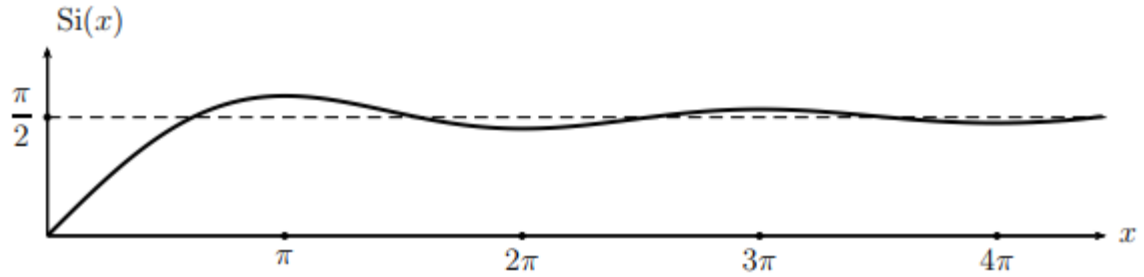


Рис. 3. Нечётная функция – интегральный синус $Si(x)$ при $x \geq 0$

Рассмотрим, как ведут себя экстремумы при $N \to \infty$. Если номер экстремума – целое число $n = \alpha N \;\; (0 < \alpha \leq 1)$, то, согласно (4), этот экстремум находится внутри рассматриваемого нами интервала в точке $t_n = \frac{1}{2}\pi\alpha$, и величина этого экстремума равная

$$\frac{2}{\pi} Si(\pi\alpha N) + O\left(N^{-1}\right),$$

имеет при N $\to \infty$ предел

$$\frac{2}{\pi} \lim_{N\to\infty} Si(\pi\alpha N) = \frac{2}{\pi} \lim_{x\to\infty} Si(x) = 1,$$

т. е. вне разрыва нашей функции её ряд Фурье сходится к ней.

Если же номер экстремума n не зависит от N, то, согласно (4), положение всех таких экстремумов при $N \to \infty$ сливается с точкой разрыва $(t = 0)$, а наибольший из этих экстремумов достигается при $n = 1$ и равен

$$\max\{\lim_{N\to\infty} S_N(t)\} = \frac{2}{\pi} Si(\pi) = 1{,}17898\ldots \qquad (5)$$

Таким образом, сумма бесконечного ряда Фурье функции (1) рис. 1, проходя через точки разрыва, делает скачки, примерно на 17,9% большие, чем скачки разлагаемой функции и график этой суммы имеет вид, изображённый на рис. 4.

Явление Гиббса, установленное им в [1] и [2] на частном примере тригонометрического разложения, имеет место и в общем случае. Как подробно показывается в [5, с. 495–497] этот же результат (5) оказывается справедливым и при разложении в ряд Фурье разрывной функции общего вида:

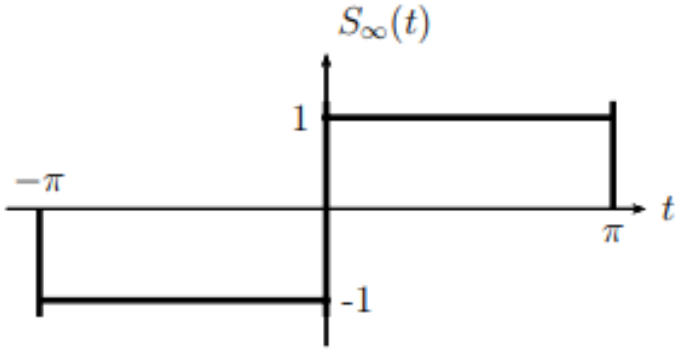


Рис. 4. Сумма ряда Фурье функции (1), рис. 1

В точках разрыва функции, разложенной в ряд Фурье, скачки значений суммы ряда Фурье превышают величину скачков значений самой функции на одинаковые доли, равные 17,9%.

Подавление эффекта Гиббса

Если заменить разрывную функцию (1) непрерывной кусочно-монотонной функцией, быстро меняющейся в окрестности разрывов функции (1), то по признаку Дирихле [5, с. 438] ряд Фурье такой функции будет в каждой точке сходиться к этой функции и, следовательно, явление Гиббса в этом случае исчезает несмотря на то, что такая функция может отличаться от исходной разрывной только на сколь угодно малых промежутках. Рассмотрим, как ведёт себя разложение Фурье непрерывного аналога разрывной функции (1):

$$\begin{cases} -\varphi\left(\dfrac{t+\pi}{\varepsilon}\right) \ при -\pi \le t \le -\pi+\varepsilon, \\ -1 \ \ при -\pi+\varepsilon \le t \le \varepsilon, \\ \varphi\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right) \ \ при -\varepsilon \le t \le \varepsilon, \\ +1 \ \ при \ \varepsilon \le t \le \pi-\varepsilon, \\ \varphi\left(\dfrac{\pi-t}{\varepsilon}\right) \ \ при \ \pi-\varepsilon \le t \le \pi, \end{cases} \qquad (6)$$

где $\varphi(x)$ – монотонно растущая нечётная функция $\varphi(-x)=-\varphi(x)$, $\varphi(1)=1$. Функция (6) изображена на рис. 5.

Коэффициенты разложения Фурье (см. (2)) функции (6) определяются выражениями:

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin mt\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\varepsilon}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin mt\,dt + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\sin mt\,dt + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\varphi\left(\frac{\pi-t}{\varepsilon}\right)\sin mt\,dt\right]. \qquad (7)$$

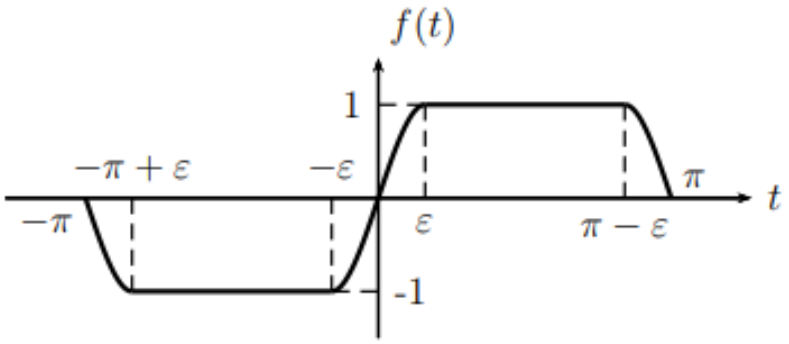


Рис. 5. Непрерывная аппроксимация разрывной функции (1), рис.1

Поскольку

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\sin mt\,dt = \frac{\cos m\varepsilon}{m}\left[1-(-1)^m\right]$$

а также

$$\int_0^{\varepsilon}\varphi(\frac{t}{\varepsilon})\sin mt\,dt = [t=\varepsilon x] = \varepsilon\int_0^1\varphi(x)\sin(m\varepsilon x)\,dx$$

и

$$\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\varphi\left(\frac{\pi-t}{\varepsilon}\right)\sin mt\,dt = [t=\pi-\varepsilon x] = -\varepsilon\int_1^0\varphi(x)\sin(\pi m - m\varepsilon x)\,dx =$$

$$= -\varepsilon\int_0^1\varphi(x)\sin(m\varepsilon x - \pi m)\,dx = -(-1)^m\,\varepsilon\int_0^1\varphi(x)\sin(m\varepsilon x)\,dx$$

то коэффициенты разложения (7)

$$b_m = \frac{2}{\pi}[1-(-1)^m](\frac{\cos m\varepsilon}{m} + \varepsilon\int_0^1\varphi(x)\sin(m\varepsilon x)\,dx)$$

снова отличны от нуля при $m = 2n-1$ и частичная сумма N первых членов фурье-разложения функции (6) равна

$$S_N(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\Phi(m\varepsilon)\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}, \qquad (8)$$

где

$$\Phi(m\varepsilon) = \cos m\varepsilon + m\varepsilon\int_0^1 \varphi(x)\sin(m\varepsilon x)\,dx \quad (m = 2n-1). \tag{9}$$

Если $m\varepsilon$ мало, то

$$\cos m\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}(m\varepsilon)^2 + O\left(m^4\varepsilon^4\right),\ \sin(m\varepsilon x) = m\varepsilon x + O\left(m^3\varepsilon^3\right),$$

$$\Phi(m\varepsilon) = 1 - \gamma(m\varepsilon)^2 + O\left(m^4\varepsilon^4\right),\ m = 2n-1, \tag{10}$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{1}{2} - \int_0^1 \varphi(x)\,x\,dx, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2},$$

поскольку для монотонно растущей от 0 до 1 функции $\varphi(x)$

$$\int_0^1 \varphi(x)\,x\,dx < \int_0^1 \max\{\varphi(x)\}\,x\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, с ростом N, до тех пор, пока величина $\gamma(m\varepsilon)^2 = \gamma\left[(2N-1)\varepsilon\right]^2$ будет оставаться малой, можно считать $\Phi(m\varepsilon) \simeq 1$, частичные суммы $S_N(t)$ ряда Фурье (8) будут совпадать с частичными суммами (3) ряда Фурье разрывной функции (1) и, следовательно, и для непрерывной функции (6) в этом случае будет наблюдаться явление, аналогичное явлению Гиббса:

вблизи границы зоны быстрого изменения непрерывной функции значения частичных сумм её ряда Фурье $S_N(t)$ с ростом N будут сначала иметь выбросы (превышающие величину изменения значений самой функции примерно на 18%), которые с дальнейшим увеличением N будут стремиться к нулю и ряд Фурье в силу признака Дирихле станет сходиться к разлагаемой непрерывной функции.

Оценим номер гармоники $N_г = 2N-1$, являющийся условной границей наблюдения эффекта Гиббса. Из выражения (10) следует оценка: $\gamma(N_г\varepsilon)^2 \sim 1$, или

$$N_г\varepsilon \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sim \sqrt{2}. \tag{11}$$

Вводя обозначение для относительного размера области резкого изменения функции

$$\delta\tau = \frac{\tau}{T},$$

где τ – длительность перехода и T – период функции имеем для рассматриваемой функции (6): $\delta\tau = \frac{2\varepsilon}{2\pi}$, откуда $\varepsilon = \pi\delta\tau$ и оценка (11) принимает вид:

$$N_г \cdot \delta\tau \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0,45 \sim \frac{1}{2}.$$

Эту оценку можно также получить из следующих соображений: чтобы начать описывать переход шириной τ нужна гармоническая составляющая ряда Фурье с периодом $T_г \equiv \frac{T}{N_г} = 2\tau$ (см. рис 6), откуда получаем:

$$\frac{\tau}{T_г} = N_г \frac{\tau}{T} = N_г \cdot \delta\tau = \frac{1}{2}.$$

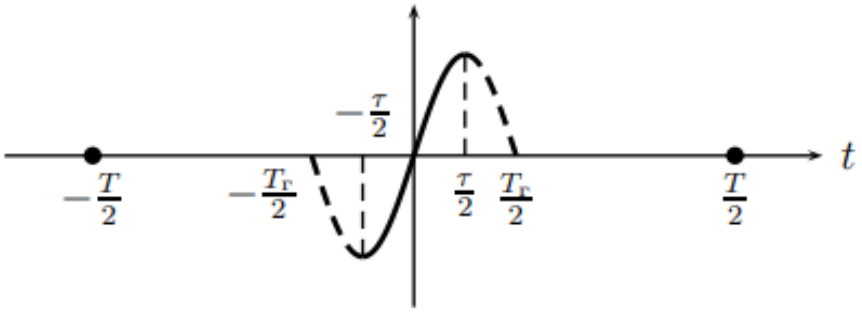


Рис. 6. Соотношение между областью τ резкого изменения функции и необходимым периодом гармоники $T_г$

Библиографический список

1. Fourier’s Seri´es. / J. Willard Gibbs // Nature. – 1898. – Vol. 59, № 1522. – P. 200.

2. Fourier’s Seri´es. / J. Willard Gibbs // Nature. – 1899. – Vol. 59, № 1539. – P. 606.

3. Cambrige and Dublin Math. Journ. – 1848. – Vol. 3. – P. 198–201.

4. Математика для электро- и радиоинженеров (с предисловием Луи де Бройля) / Андре Анго. – Москва : Наука, 1964.

5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1966. – Т. III.

МЕТОДЫ КОЛЛОКАЦИИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ

А. Н. Тында, А. С. Жбанова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: tyndaan@mail.ru; anzhelka.zhbanova@yandex.ru

Введение

Работа посвящена построению численных решений интегральных уравнений Вольтерра I рода специального вида и их систем. Ядра рассматриваемых уравнений имеют конечные разрывы вдоль семейства гладких кривых. В цикле предыдущих работ для таких уравнений были построены ряд прямых и итерационных методов, как в линейном, так и в нелинейном случае (см. работу [1] и ссылки в ней). В предложенных методах использовалась кусочно-постоянная и кусочно-линейная аппроксимация искомого решения. В настоящей работе строится полиномиальная аппроксимация решений, а для определения ее неизвестных параметров используется коллокационная техника.

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \le s \le t \le T, f(0) = 0, \qquad (1)$$

где ядро определено формулой

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), \ \ t,s \in m_1, \quad m_i = \{t,s | \alpha_{i-1}(t) < s \le \alpha_i(t)\}, \\ \ldots \\ K_n(t,s), \ \ t,s \in m_n, \ \ \alpha_0(t) = 0, \alpha_n(t) = t, i = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $\alpha_i(t), \quad f(t) \in C^1_{[0,T]}$, Компоненты ядра $K_i(t,s)$ имеют непрерывные производные по t для $t,s \in \overline{m_i}$, $K_n(t,t) \ne 0$, $\alpha_i(0) = 0, 0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \ldots < \alpha_{n-1}(t) < t$, $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$ возрастают в малой окрестности $0 \le t \le \tau$, $0 < \alpha_1'(0) \le \ldots \le \alpha_{n-1}'(0) < 1$.

1. Метод полиномиальной коллокации

Запишем уравнение (1) в развернутом виде

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0,T]. \qquad (3)$$

Решение (3) будем искать в виде отрезка степенного ряда

$$X_m(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j, \tag{4}$$

с коэффициентами a_j, $j = 0,1,\ldots,m,$ подлежащими определению.

Подставив (4) в (3), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s)\left(\sum_{j=0}^{m} a_j s^j \right) ds = f(t).$$

Изменим порядок интегрирования и суммирования

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s) s^j ds = f(t) \tag{5}$$

и преобразуем последнее равенство следующим образом

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s) s^j ds = f(t)$$

Выделим слагаемое, соответствующее $j = 0$:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s) s^j ds = f(t) - a_0 \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t,s) ds$$

Обозначим через $F(t)$ правую часть последнего равенства и потребуем его выполнения в точках равномерной сетки

$$t_k = \frac{kT}{m}, \quad k = 1,2,...,m.$$

Коэффициент $a_0 = X_m(0) = x_0$ разложения (4) определяется следующим образом: продифференцируем обе части уравнения (3) по переменной t

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{n} (\int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \frac{\partial K_i(t,s)}{\partial t} x(s) ds + \alpha_i'(t) K_i(t,\alpha_i(t)) x(\alpha_i(t)) -$$

$$-\alpha_{i-1}'(t) K_i(t,\alpha_{i-1}(t)) x(\alpha_{i-1}(t))).$$

Из последнего соотношения получаем

$$x_0 = \frac{f'(0)}{\sum_{i=1}^{n} K_i(0,0)\left[\alpha_i'(0) - \alpha_{i-1}'(0)\right]}. \qquad (6)$$

Таким образом, приходим к системе

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_{kj} a_j = F_k, \quad k = 1,2,...,m, \qquad (7)$$

где

$$\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t_k)}^{\alpha_i(t_k)} K_i(t_k, s) s^j ds, \quad F_k = F(t_k) \qquad (8)$$

Система линейных алгебраических уравнений (7) решается относительно неизвестных коэффициентов разложения (4) методом Жордана-Гаусса, а для вычисления элементов матрицы этой системы используются квадратурные формулы, учитывающие разрывы ядра $K(t,s)$.

2. Сплайн-коллокация

В предыдущем пункте предложен достаточно эффективный метод решения уравнений вида (3) для относительно небольших значений T. При увеличении длины интервала планирования $[0,T]$ для сохранения порядка точности приходится повышать степени аппроксимирующих полиномов, что приводит к существенным вычислительным ошибкам. В связи с этим предлагается использовать полиномиальную сплайн-аппроксимацию решения, построенную на каждом участке аналогичным образом. Ниже опишем алгоритм такой аппроксимации.

Разобьем отрезок $[0,T]$ точками $t_k, k = \overline{0,N}$, на сегменты $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k], k = \overline{1,N}$. Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде непрерывного полиномиального сплайна $X_N(t)$ порядка m, определенного следующим образом

$$X_N(t) = P_k(t) \quad при \quad t \in \Delta_k, \quad P_k(t) = \sum_{j=0}^{m} A_{kj} (t - t_{k-1})^j, \qquad (9)$$

с коэффициентами $A_{kj}, k = 1,2,\ldots,N, j = 0,1,\ldots,m,$ подлежащими определению.

На каждом из сегментов $\Delta_k, k = \overline{1,N},$ введем дополнительные узлы

$$t_k^j = t_{k-1} + \frac{t_k - t_{k-1}}{m} j, \quad j = \overline{0,m} \qquad (10)$$

Для определения коэффициентов разложения (9) на первом сегменте Δ_1 потребуем выполнения равенства (3) в точках t_1^j, $j=\overline{1,m}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}(t_1^j)}^{\alpha_i(t_1^j)} K_i(t_1^j,s)\left(\sum_{l=0}^{m}A_{1l}s^l\right)ds = f(t_1^j).$$

Преобразуем это равенство следующим образом

$$\sum_{l=1}^{m}A_{1l}\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}(t_1^j)}^{\alpha_i(t_1^j)} K_i(t_1^j,s)s^l ds = f(t) - A_{10}\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}(t_1^j)}^{\alpha_i(t_1^j)} K_i(t_1^j,s)ds,$$

где коэффициент A_{10} также находится с помощью дифференцирования исходного уравнения по формуле

$$A_{10} = \frac{f'(0)}{\sum_{i=1}^{n}K_i(0,0)\left[\alpha_i'(0)-\alpha_{i-1}'(0)\right]}. \qquad (11)$$

Приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=1}^{m}\gamma_{jl}^1 A_{1l} = F_{1j}, \quad j=1,2,...,m, \qquad (12)$$

где

$$\gamma_{jl}^1 = \sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}(t_1^j)}^{\alpha_i(t_1^j)} K_i(t_1^j,s)s^l ds, \quad F_{1j} = f(t_1^j) - A_{10}\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}(t_1^j)}^{\alpha_i(t_1^j)} K_i(t_1^j,s)ds. \qquad (13)$$

Определив из системы (12) коэффициенты сплайна (9) на сегменте Δ_1, можем переписать уравнение (1) в виде

$$\int_{t_1}^{t} K(t,s)x(s)ds = f_1(t), \quad t\in[t_1,T], \quad f_1(t) = f(t) - \int_{0}^{t_1} K(t,s)P_1(s)ds. \qquad (14)$$

Потребуем теперь выполнения (14) в точках $t=t_2^j$, $j=\overline{1,m}$, сегмента Δ_2 и заметим при этом, что поскольку сплайн $X_N(t)$ – непрерывный, то $A_{20} = P_2(t_2^0) = P_1(t_1^m)$. Имеем

$$\sum_{l=1}^{m}A_{2l}\int_{t_1}^{t_2^j} K(t_2^j,s)s^l ds = f_1(t_2^j) - A_{20}\int_{t_1}^{t_2^j} K(t_2^j,s)ds.$$

Решив последнюю систему уравнений относительно коэффициентов сплайна $A_{2l}, l=\overline{1,m}$, переходим к следующему сегменту Δ_3, Δ_4 и так далее.

Предположим теперь, что решение найдено на сегментах $\Delta_i, i=1,2,\ldots,k-1$. Тогда на сегменте Δ_k имеем

$$\sum_{l=1}^{m} A_{kl} \int_{t_{k-1}}^{t_k^j} K(t_k^j,s)s^l ds = f_{k-1}(t_k^j) - A_{k0} \int_{t_{k-1}}^{t_k^j} K(t_k^j,s)ds,\ j=\overline{1,m}, \qquad (15)$$

где

$$f_{k-1}(t) = f(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t,s)P_i(s)ds.$$

Таким образом, приходим к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{l=1}^{m} \gamma_{jl}^k A_{kl} = F_{kj}, \quad j=\overline{1,m}, k=2,3,\ldots,N, \qquad (16)$$

для вычисления компонентов

$$\gamma_{jl}^k = \int_{t_{k-1}}^{t_k^j} K(t_k^j,s)s^l ds \quad u \quad F_{kj} = f_{k-1}(t_k^j) - A_{k0} \int_{t_{k-1}}^{t_k^j} K(t_k^j,s)ds$$

которой используются специальные квадратуры, учитывающие для каждого конкретного значения N разрывы ядра $K(t,s)$.

Погрешность такой аппроксимации при $x(t)\in C^{m+1}[0,T]$ можно оценить неравенством

$$\left\|x(t) - X_N(t)\right\|_{C[0,T]} \le \frac{L}{N^{m+1}}, \qquad (17)$$

где L – константа, не зависящая от N и m.

3. Результаты

Для иллюстрации эффективности полиномиальной коллокации приведем результаты решения двух модельных уравнений

Модельная задача 1. Рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$\int_0^{t/2} (t+s)x(s)ds + \int_{t/2}^{2t/3} tsx(s)ds + \int_{2t/3}^{t} e^s x(s)ds = f(t), \quad t\in[0;1], \qquad (18)$$

где $f(t)$ подобрана таким образом, чтобы точным решением была функция $x^* = t\sin t$. Приведем результаты применения к уравнению (18) метода полиномиальной коллокации в таблице ниже, в которой приняты следующие обозначения: **m** – порядок многочлена, $\varepsilon = \| X_m(t) - x^*(t) \|_{C_{[0,T]}}$.

Таблица 1

Зависимость погрешности ε вычислений от степени **m**

m	1	2	3	5	8	10	15
ε	0.183	0.027	0.0041	$3.22\cdot10^{-5}$	$2.89\cdot10^{-9}$	$9.77\cdot10^{-12}$	$9.14\cdot10^{-20}$

Модельная задача 2. Рассмотрим теперь уравнение

$$\int_0^{t/3} (t-s)^2 x(s)ds + \int_{t/3}^{3t/4} \cos(s)x(s)ds +$$

$$+ \int_{3t/4}^{t} (1+\sin(2s))x(s)ds = f(t), \quad t \in [0;2], \tag{19}$$

где $f(t)$ подобрана таким образом, чтобы точным решением была функция $x^* = e^{2-t}t^2$. Результаты применения к уравнению (19) метода полиномиальной коллокации приведены в таблице 2.

Таблица 2

Погрешность вычислений для задачи (19)

m	1	5	8	10	15	20
ε	0.52	0.038	$6.97\cdot10^{-5}$	$4.71\cdot10^{-7}$	$3.85\cdot10^{-13}$	$5.15\cdot10^{-20}$

Библиографический список

1. Muftahov, I. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels / I. Muftahov, A. Tynda, D. Sidorov // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 313. – P. 119–128.

2. Sidorov, D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control / D. Sidorov // World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A / L. O. Chua, ed. – Vol. 87. – Singapore : World Scientific Press, 2015. – 243 p.

3. Тында, А. Н. Решение систем нелинейных интегральных уравнений с неизвестными задержками / А. Н. Тында // Труды Средневолжского математического общества. – 2007. – Т. 9, № 1. – С. 253–259.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОНКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАБОЛЕВАНИЙ

С. Дж. Разокзода, В. В. Артюхин

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: razokzoda@mail.ru; scar@sura.ru

В эпоху изобилия высокопроизводительных биологических технологий биомедицинские исследователи исследуют более всеобъемлющие аспекты заболеваний с все более тонким разрешением. Это приводит не только к большому объему данных, но и к данным с сотнями, если не тысячами измерений. Многомерный анализ является основой статистических инструментов в анализе биомедицинских данных. Это касается связывания матриц данных из n строк по P столбцам со строками, представляющими образцы или пациентов и атрибуты столбцов, с определенными переменными ответа или результата. Объединяющей целью различных типов многомерных данных, получаемых в последние годы, является понимание биологических процессов, особенно процессов, связанных с возникновением заболеваний или управлением ими.

Некоторые заболевания полностью обратимы и могут быть эффективно излечены. Более того, некоторые заболевания, требующие надлежащего лечения, были практически уничтожены. Рак, однако, по сей день остается самым непредсказуемым и трудноизлечимым заболеванием. По самой своей природе у рака только одна цель: размножаться. Ведь рак – это нерегулируемый рост клеток, которые не в состоянии позаботиться о том, чтобы остановить рост. Мы называем «рак» потому, что все они обладают фундаментальным общим свойством: аномальным делением клеток [1]. Нормальные клетки проходят через цикл деления, старения, а затем отбора для смерти. Раковые клетки способны обойти этот нормальный цикл и избежать распознавания, которое должно быть устранено. При наличии достаточного времени и нашей неспособности обнаружить заболевание, группы клеток могут вырасти до размеров, которые вызовут дискомфорт или другие симптомы.

Наследственная генетика, очевидно, не единственный источник аномалий в клетках. Люди не живут в стерильном мире, лишенном воздействия окружающей среды или патогенов. Люди должны работать, а рабочая среда может быть опасной. Опасность может прийти в виде радиации, химических веществ. Наконец, человек социален. Он нашел

определенные привычки, которые ему нравятся, потому что они либо расслабляют его, либо освобождают от запретов. Такие привычки, включая курение и употребление алкоголя, могут оказывать огромное влияние на генетический состав клеток.

Поскольку раковые клетки имеют склонность перебираться на другие органы, терапия должна быть направлена на лечение всего тела, а не только места происхождения. Проблема химиотерапии заключается в том, что она не являются избирательной и наносит ущерб тканям, которые не затронуты раком. Этот метод лечения не является естественными для человека и приводят к тошноте, потере аппетита, усталости, а также истощению наших клеток, которые защищают нас от инфекции и тех, которые несут кислород.

Лечение рака находится в поиске "умных" вариантов [2]. Успешное лечение рака требует создания методов лечения, которые могут выполнять три основные задачи: искать рак, распознавать и убивать его. С помощью Deductor по предоставленным данным можно смоделировать онкологические заболевания.

Для анализа выбраны данные, предоставленные Республиканским онкологическим научным центром и социальной защитой населения республики Таджикистан за 2010-2014 года. Набор данных содержит следующие переменные:

- вид рака;
- пол пациента;
- симптомы;
- причина заболевания;
- возраст пациента;
- анализ крови при заболевании;
- диагностика;
- класс;
- стадия;
- лечение;
- семья;
- место жительства;
- помогло ли лечение?

Исходные данные кодировались заранее и представляют собой текстовый файл. В качестве разделителей полей в файле используется запятая. Для решения задачи в Deductor сначала необходимо импортировать файл с исходными данными. Загруженные данные необходимо подготовить к решению задачи путем предобработки. В отчете обнаружены три типа проблем качества: пропуски (1поле), выбросы и экстремальные значения в одном поле. В программе предусмотрен специальный узел для обработки пропусков (который может, как читать настройки, сделанные в узле «Качество данных», так и быть самостоятельным

со своими настройками), содержащий несколько методов для обработки полей.

С помощью кластеризации решалась задача разбиения на группы видов рака. В результате алгоритм разбил Виды рака на пять кластеров с разной поддержкой и разной значимостью свойств. Четвертый кластер собрал в себя максимальное количество людей, которым не помогло лечение. Наиболее ярко выраженными кластерами по заданным свойствам являются нулевой и первый кластеры. Они максимально отличаются от остальных рассматриваемых групп значениями свойств, и минимальной поддержкой.

С помощью компонента «Калькулятор» определили, какие пациенты входят в класс A= помогло лечение, а какие в класс B = не помогло лечение. Для этого в Калькуляторе задали следующее условие: IF (COL13>0; “B”;”A”). С помощью визуализатора Статистика увидели, что 730 пациентов принадлежит классу A, а 370 к классу B, т.е. большинству пациентов лечение помогло.

Таблица сопряженности показывает ошибки классификации. Для нашего примера модель хорошо распознает тех пациентов, которым не помогло лечение: только 2 живых пациента были распознаны как умершие. Но модель сделала ошибку, так как распознала 84 умерших пациентов как живых. Это объясняется неудачным выбором порога отсечения.

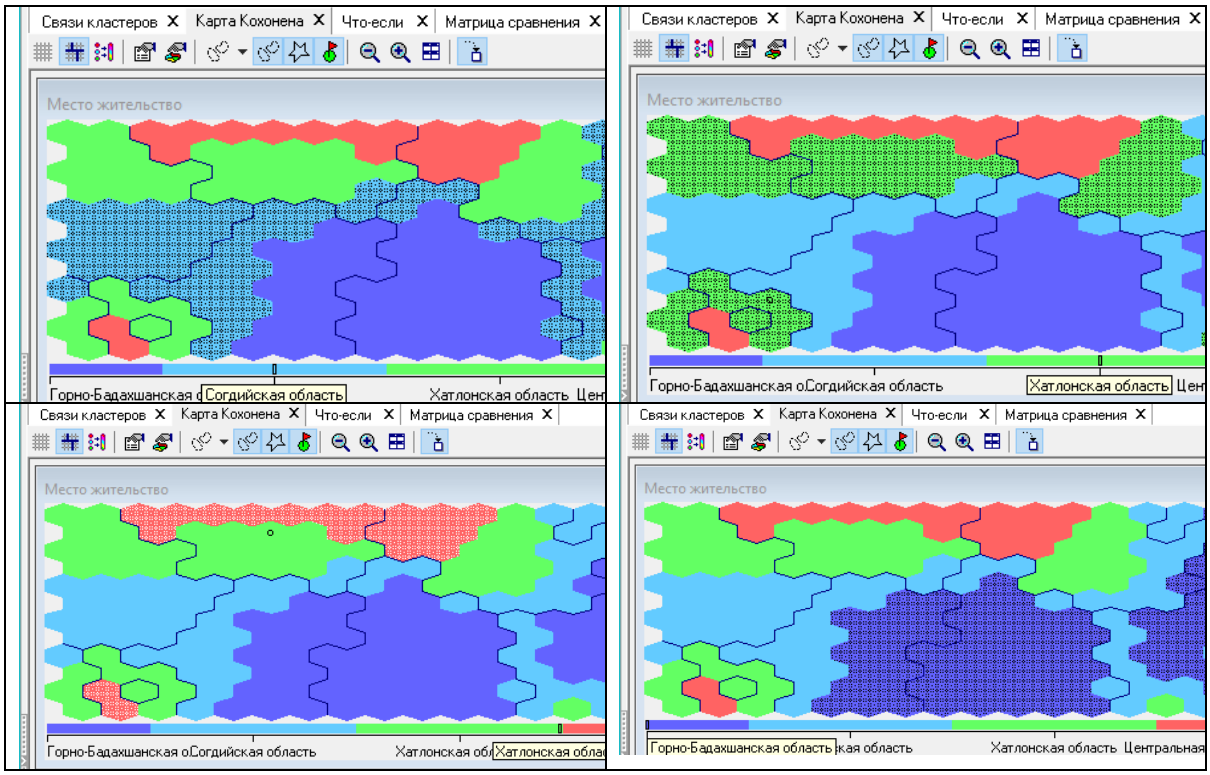


Рис. 1. Карты Кохонена

Для того чтобы определить в каких областях больше всего больных раком воспользовались картами Кохонена. Анализ проводили по карте Место жительство, чтобы увидеть, в каких областях больше всего прогрессирует рак.

Из рисунка можно сделать вывод, что на первом месте стоит Горно – Бадахшанская область (420 - заболевших раком), на втором месте Согдийская область (312 – заболевших раком), третье место Хатлонская область (245 - заболевших раком), а на четвертом месте Центральная область (123 - заболевших раком).

Исследование онкологических заболеваний невозможно без постановки экспериментов, проведение которых на человеке недопустимо. Это можно реализовать с помощью моделирования, где каждая модель адекватна опухолям человека. Учитывая особенности моделей, полученные на них данные можно переносить в клинику, где они подвергаются корректировке или отвергаются.

Библиографический список

1. Царь всех болезней. Биография рака / Сиддхартха Мукерджи. – Москва, 2013.

2. Онкология : учеб. пособие / П. В. Глыбочко, Т. Н. Попова и др. – Москва : Академия, 2008. – 400 с.

О ДИНАМИКЕ МАКРОЭКОНОМИКИ С РАЗЛИЧНОЙ КВАЛИФИКАЦИЕЙ ТРУДА[1]

А. В. Прасолов

Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.prasolov@spbu.ru

1. Постановка задачи

Хорошо известны балансовые и определяющие соотношения [1, 2]:

$$\dot{K}(t) = -\delta K(t) + I(t), \tag{1}$$

$$I(t) = sY(t), \tag{2}$$

$$Y(t) = F\big(K(t), L(t)\big), \tag{3}$$

$$\dot{L}(t) = d\big(t, L(t)\big). \tag{4}$$

[1] Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00551.

Объединяя (1)-(4) и добавляя явную форму F и d (например, $F = AK^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)$, $d\left(t, L(t)\right) = \bar{d}L$), получим замкнутое уравнение относительно $K(t)$:

$$\dot{K}(t) = -\delta K(t) + sAK^{\alpha}(L_0 e^{\bar{d}t})^{\beta}. \qquad (5)$$

Здесь K – основные фонды (капитал), δ – коэффициент амортизации, I – внутренние инвестиции, s – доля ВВП, идущая на внутреннее инвестирование; Y – ВВП экономики; F – производственная функция (мы далее будем рассматривать функцию Кобба-Дугласа) с параметрами A, α, β; d – демографическая скорость роста (или снижения) объема рабочей силы.

В докладе предполагается разделить рабочую силу L на квалифицированную S и неквалифицированную U части, как это сделано в [3], построить модель динамики этих переменных и ввести производственную функцию типа Кобба-Дугласа:

$$F = AK^{\alpha}(t)S^{\beta}(t)U^{\gamma}(t). \qquad (6)$$

Отметим, что мы не будем предполагать однородность (6) первой степени, т.е. $\alpha + \beta + \gamma = 1$, и тому подобных ограничений. В задачах с человеческим капиталом, образованием и отчислением из ВВП на повышение квалификации [1], основное внимание уделялось перемещению работников из группы неквалифицированных в группу квалифицированных. В реальности изменения могут быть и в противоположном направлении: миграция или демографический приток работников без обучения и т.п.

2. Математическая модель динамики.

Итак, считаем, что $L=S+U$. Будем составлять модель в дискретном времени $t=1, 2, 3,\ldots$ по аналогии с (1)-(4) [4]:

$$\begin{cases} K(t+1) = K(t) + sAK^{\alpha}(t)S^{\beta}(t)U^{\gamma}(t) - \delta K(t), \\ \begin{pmatrix} S(t+1) \\ U(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(t) \\ U(t) \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} S(t) \\ U(t) \end{pmatrix} + D(t) + M(t). \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь B – постоянная матрица, получаемая эмпирическим путем, и отвечающая за переходы из одной квалификационной группы в другую (по разным причинам, включая образование). $D(t) = \begin{pmatrix} DS(t) \\ DU(t) \end{pmatrix}$ – вектор демографического изменения групп. $M(t) = \begin{pmatrix} MS(t) \\ MU(t) \end{pmatrix}$ – вектор миграционного изменения групп. Пусть при $t \le T$ (T – текущий момент времени)

нам известны $K(t), S(t), U(t), Y(t)$ и постоянный коэффициент амортизации основных фондов δ. Тогда оценки параметров $sA, \alpha, \beta, \gamma$ легко получить методом наименьших квадратов. Относительно вектора $D(t)$ необходимо сделать предположения, которые связывают демографические изменения с распределением по группам квалификации.

Как в большинстве работ по оценке трудоспособного возраста населения страны (т.е. без учета миграции) положим, что он наступает в 15 лет и продолжается до 72 лет. Население приходит в состояние работоспособности и уходит из него по многим причинам. Мы не будем их обсуждать в полном многообразии, но сделаем два предположения, которые позволят дать количественную оценку потока, который пополняет группу неквалифицированных работников, и потока, уменьшающего группу квалифицированных.

Предположение 1. Все пятнадцатилетние люди, входящие в работоспособный возраст, являются неквалифицированными.

Предположение 2. Все люди, покинувшие множество трудоспособных, - квалифицированные.

Для того, чтобы оценить сколько каждый год пятнадцатилетних людей становится 16ти летними, необходимо воспользоваться известным алгоритмом когортно-компонентного анализа с соответствующей матрицей Лесли. Для этого потребуются данные по рождаемости и детской смертности, но они доступны. Поэтому будем считать, что $DU(t)$ является известной функцией для нужных значений t.

Изменение числа квалифицированных работников $DS(t)$ практически невозможно оценить, т.к. имеется слишком много причин для входа и выхода в число работающих (смерти, болезни, выход на пенсию, эмиграция, отсутствие желания работать, дефицит рабочих мест, тюремное заключение и др.). Опираясь на Предположение 2 и модель (7) введем в рассмотрение виртуальную (неизмеримую) величину $DS(t)$ как формирующую баланс рабочей силы:

$$L_{t+1} = L_t + M_t + DU(t) + DS(t),$$

то есть число работающих в (t+1) –ом году складывается из работавших в прошлом году, добавленной трудовой миграции и добавленным по возрасту неквалифицированным (согласно предположению 1) работникам. Последнее слагаемое может быть, как положительным (когда квалифицированные работники после перерыва возвращаются на работу), так и отрицательным – о чем мы уже говорили выше. Итак,

$$DS(t) = L_{t+1} - L_t - M_t - DU(t). \qquad (8)$$

Здесь $M_t = MS(t) + MU(t)$. Соотношение (8) строится из измеряемых величин и показывает, сколько работающих покинуло группу тру-

доспособных за период от t до t+1. Предположение 2 позволяет утверждать, что все они квалифицированные. Когда мы анализируем динамику величин в (8) в прошлом, то все определено. Однако для прогноза в будущем потребуются модели величин, стоящих в правой части (8). Особенно большие неопределенности возникают с вновь введенной переменной $DS(t)$. Это происходит от того, что число людей, покинувших работающих, становится известным только в конце текущего периода. Поэтому необходимо моделирование отдельно этой переменной на будущие периода. Например, полученные по прошлым замерам $DS(t)$ формируют авторегрессионную функцию порядка 2 и выше [4]:

$$DS(t) = c_1 DS(t-1) + c_2 DS(t-2) + c_3 . \qquad (9)$$

Приток рабочей силы через миграцию будем считать управлением и, следовательно, задаваемой величиной.

3. Трудовая миграция как средство управления

В результате вышеописанного моделирования уравнения (7) и (9) позволяют вычислить $K(T+1), S(T+1), U(T+1)$ с любым заданным объемом миграции M_T. Но в (7) квалификация рабочих мигрантов уже известна, и она не может быть измерена. Поэтому, аналогично модели (9), по ранее зафиксированному разделению миграционного потока на квалифицированных и неквалифицированных будем предполагать, что в величине M_t доля квалифицированных равна μ: $MS(t) = \mu M_t$, $MU(t) = (1-\mu) M_t$ и μ вычислим приближенно. Возможны более сложные модели для коэффициента μ, но для данной работы они не используются. Таким образом, подбирая уровень миграции на следующий период с фиксированным μ добьемся необходимого увеличения $Y(t)$, а именно, для заданного роста ВВП τ определим уровень миграции, приводящий к равенству

$$Y(T+1) = \tau Y(T) . \qquad (10)$$

Используя (3), (6), (7) и (9) и считая известными все необходимые параметры получим основное соотношение из (10):

$$\left[(1-\delta)K(T) + sAK^{\alpha}(T)S^{\beta}(T)U^{\gamma}(T)\right]^{\alpha} \times$$

$$\times\left[S(T)(b_{11}+1) + b_{12}U(T) + c_1 DS(T) + c_2 + \mu M\right]^{\beta} \times$$

$$\times\left[b_{21}S(T) + (1+b_{22})U(T) + DU(T) + (1-\mu)M\right]^{\gamma} = \tau K^{\alpha}(T)S^{\beta}(T)U^{\gamma}(T) .$$

Это уравнение относительно скалярного M, которое обязательно имеет решение, если выполнено условие

$$\frac{\tau K^{\alpha} S^{\beta} U^{\gamma}}{\left[(1-\delta)K + sAK^{\alpha} S^{\beta} U^{\gamma}\right]^{\alpha}} >$$

$$> \left[b_{21}S + (1+b_{22})U + DU\right]^{\gamma} \left[(b_{11}+1)S + b_{12}U + c_1 DS + c_2\right]^{\beta}.$$

В последнем неравенстве переменные рассматриваются в момент *T*. Таким образом, зная численные значения параметров и переменных всегда возможно определить необходимый уровень миграции на один временной период, например, на один год.

Библиографический список

1. Griliches, Zvi. Notes on the Role of Education in Production Functions and Growth Accounting / Zvi Griliches // Education, Income, and Human Capital. National Bureau of Economic Research. – 1970. – P. 71–127.

2. Romer, D. Advanced macroeconomics / David Romer. – McGraw-Hill, 1996. – 540 p.

3. Prasolov, A. On the dynamics of different qualification labor in macroeconomic aspect / A. Prasolov, A. Lukina, E. Dukhno // IEU2018Contemporary Issues of Economic Development of Russia: Challenges and Opportunities : Proceedings of Conference. – 2018. – Vol. LIX, № 80. – P. 743–752. – DOI https://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2019.04.80

4. Прасолов, А. В. Математические методы экономической динамики / А. В. Прасолов. – 2 изд. – Санкт-петербург : Лань, 2015. – 352 с.

О МОДЕЛИРОВАНИИ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

В. Д. Зайцев, Т. Ф. Мамедова

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва,
г. Саранск, Россия
E-mail: zaycevvd95@gmail.com; mamedovatf@yandex.ru

Под инвестиционным риском (в общем виде) понимают вероятность возникновения непредвиденных финансовых потерь (снижения прибыли, доходов, потери капитала и т. п.) в ситуации неопределенности условий инвестиционной деятельности.

Инвестиционный риск характеризует вероятность возникновения непредвиденных финансовых потерь. Уровень инвестиционного риска определяется как отклонение ожидаемых доходов от инвестирования от

средней или расчетной величины, поэтому оценка инвестиционных рисков всегда связана с оценкой ожидаемых доходов и их потерь.

Актуальность оценки риска инвестиционного проекта объясняется не только очевидной эффективностью использования при экономическом и маркетинговом планировании, но и многообразием постановок задач подобного типа, трудностью создания совершенных математических моделей и выбора методов их решения. Немаловажное значение играют при этом и аппаратные средства, которые применяются для оценки рисков инвестиционных проектов. В последнее время все большую популярность приобретают мобильные приложения, позволяющие оперативно решать возникающие задачи.

Был проведен анализ литературных источников для выявления наиболее эффективных методов оценки рисков инвестиционных проектов. В частности, Мукаевым Р.Х. в его статье для проведения оценки рисков инвестиционных проектов разработки нефтяных месторождений используется метод имитационного моделирования Монте-Карло [1]. Титов А.Н. в своей работе проводит стохастическое моделирование и статистический анализ чистой современной стоимости проекта, а также расчет и имитационное моделирование риска инвестиционного проекта для конкретного предприятия [2]. Широкое распространение в последнее время получает нечёткого моделирование с нечётким значением критерия эффективности. Такой подход учитывает большее количество факторов, влияющих на прибыль инвестиционного проекта [3]. Были изучены так же предлагаемые подходы оценки инвестиционных проектов Батьковским А.М. [4] и Овешниковой Л.В. [5]. В результате можно сделать вывод, что на практике наиболее распространенным и приемлемым остается метод имитационного моделирования Монте-Карло. Но для его оперативного применения требуются новые аппаратные средства.

Для реализации указанного недостатка было разработано мобильное приложение «РИСКМИН» на платформе iOS, функционал которого позволяет провести оценку риска инвестиционного проекта методом имитационного моделирования.

Рассмотрим применение созданного мобильного приложения на конкретном производственном примере.

Оценим риск инвестиционного проекта по производству прожекторов, реализуемого предприятием ООО “Ион” г. Саранска.

В процессе предварительного анализа исходных данных экспертами выявлены три ключевых параметра проекта и определены границы их изменений. Прочие параметры считаются постоянными величинами. Исходные данные отображены в таблицах 1 и 2.

Для выявления степени эффективности инвестиционных вложений был использован такой критерий анализа собственного риска проекта,

как показатель чистой современной стоимости проекта, который находится по формуле [6]:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{NCF_t}{(1+r)^t} - I_0,$$

где используются следующие величины: NCF_t – величина постоянного потока платежей в периоде t; r – нормы дисконта; I_0 – первоначальный объем инвестиций.

Таблица 1

Ключевые параметры проекта

Показатели	Сценарий		
	Наихудший	Наихудший	Вероятный
Объем выпуска Q	150	300	200
Цена за штуку P	40	55	50
Перемены затраты V	35	25	30

Таблица 2

Неизменяемые параметры проекта

Показатели	Наиболее вероятное значение
Постоянные затраты F	500
Амортизация A	100
Налог на прибыль T	60
Норма дисконта r	10
Срок проекта n	5
Начальные инвестиции I_0	2000

Будем считать, что такие параметры, как нормы дисконта и первоначального объема инвестиций известны и считаются постоянными в течение всего срока реализации проекта. Так же предположим, что величина потока платежей NCF для любого периода t одинакова и находится из соотношения:

$$NCF = \left[Q\left(P - V\right) - F - A \right]\left(1 - T\right) + A,$$

где все параметры определяются в таблице 2.

Предположим также, что все ключевые переменные из таблицы 1 имеют равномерное распределение вероятностей.

Учитывая выше сказанное, чистая современная стоимость, так же будет иметь равномерное распределение вероятностей и вероятность того, что она будет меньше определенного значения x, будет рассчитываться по формуле:

$$p(NPV < x) = \Phi\left(\frac{x - M}{\sigma}\right),$$

где Ф – функция распределения вероятностей Лапласа, σ – стандартное отклонение, а M – математическое ожидание.

Для проведения компьютерной имитации (100 имитаций) и вероятностного анализа использовалась созданная мобильная программа «РИСКМИН». Исходные данные вводятся согласно таблицам 1 и 2. После ввода данных, начинается этап моделирования. Результаты имитационного эксперимента, полученные с помощью мобильного приложения, наглядно представляются на экране этого устройства (рис. 1).

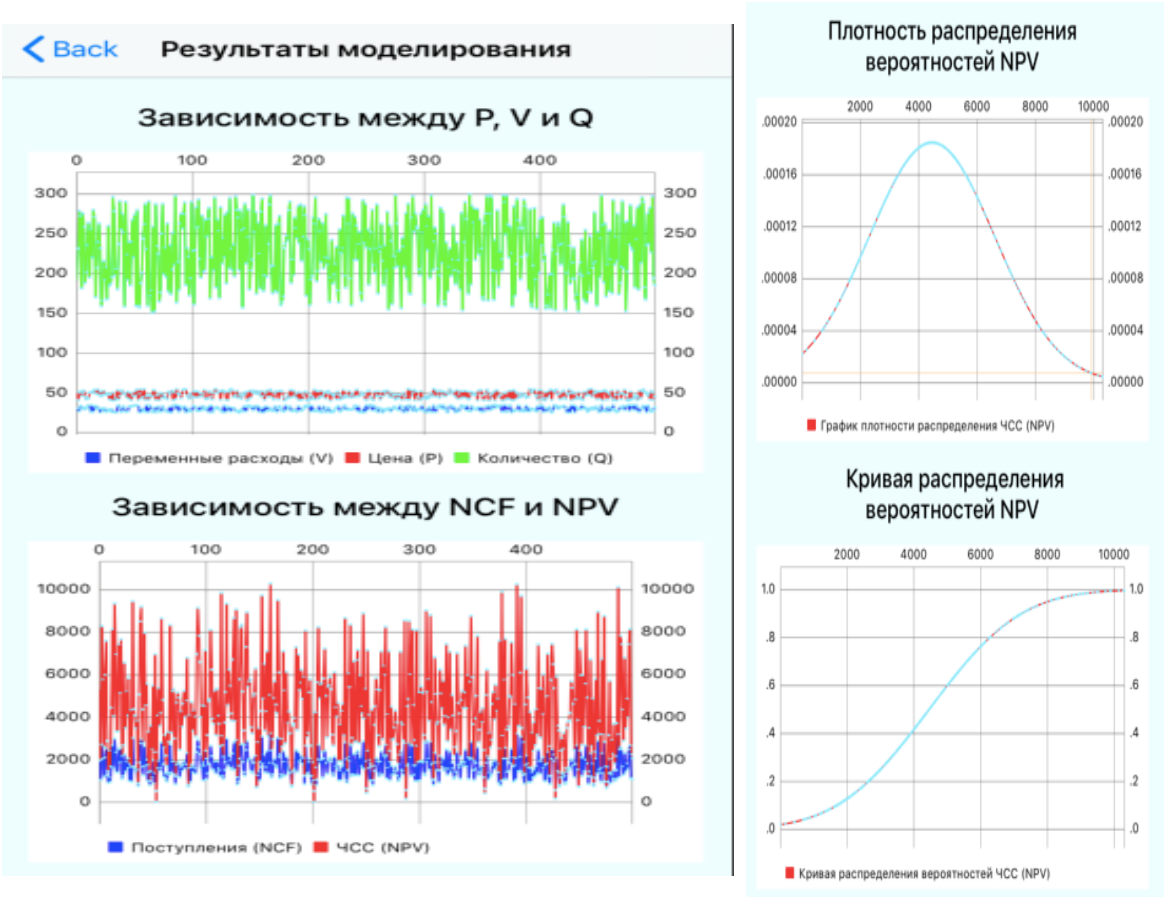


Рис. 1

Анализируя зависимость между ключевыми параметрами, а также между потоком платежей NCF и величиной NPV представленную на экране, нетрудно заметить, что в целом вариация значений всех трех параметров носит случайный характер, что подтверждает гипотезу и их независимости. А направления колебаний потока платежей и NPV совпадают, что свидетельствует о существовании сильной корреляционной связи, близкой к функциональной.

Мобильное приложение позволяет так же оперативно отслеживать многие другие важные для оценки риска инвестиций параметры (рис. 2).

В результате можно сделать вывод, что у исследуемого проекта вероятность отрицательного значения NPV, при стандартном отклонении равном 2169 и среднем значении 4453, не превышает 1.957%. В рамках 500 имитаций, величина NPV отрицательных значений не принимала. Поэтому, ввиду незначительности риска, проект следует принимать к реализации.

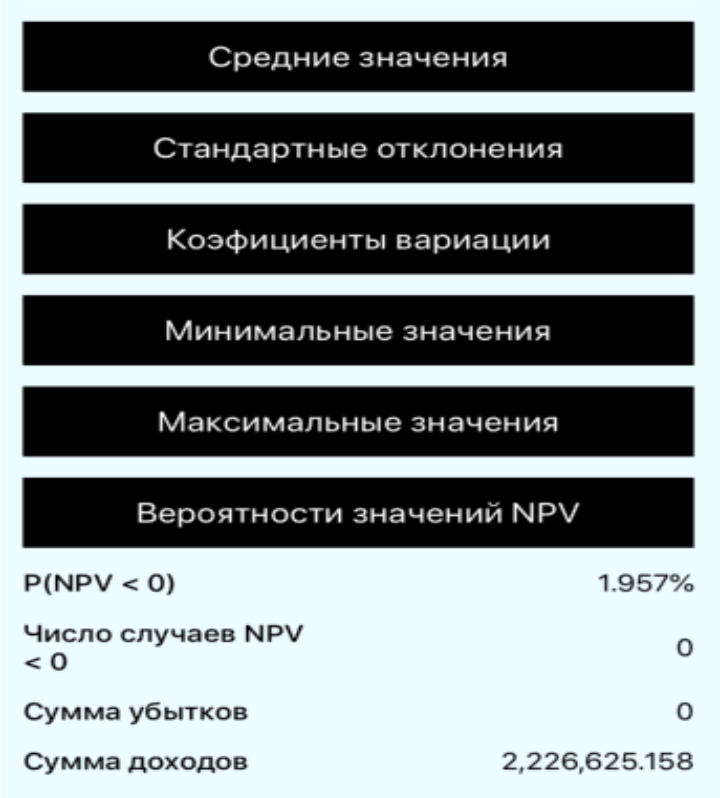


Рис. 2

Таким образом, разработанное мобильное приложение «РИСКМИН», позволяет успешно производить имитационное моделирование и оперативно рассчитывать риски для различных инвестиционных проектов. Среди наиболее важных задач, решаемых с помощью представленного приложения, можно отметить существенное сокращение времени на проведение оценки инвестиционного риска.

Библиографический список

1. Мукаев, Р. Х. Оценка рисков инвестиционных проектов разработки нефтяных месторождений методом имитационного моделирования (Монте-Карло) / Р. Х. Мукаев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Социально-экономические науки. – 2015. – № 2. – С. 80–88.

2. Титов, А. Н. Имитационное стохастическое моделирование дисконтированного дохода и риска инвестиционного проекта / А. Н. Титов, Р. Ф. Тазиева, Е. П. Фадеева // Вестник Технологического университета. – 2017. – Т. 20, № 19. – С. 88–92.

3. Горемыкина, Г. И. Моделирование оценки риска инвестиционного проекта с учетом инновационного поведения предприятия / Г. И. Горемыкина, М. А. Жданова, И. Н. Мастяева // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 11-5. – С. 986–990.

4. Батьковский, А. М. Анализ рисков реализации инвестиционных проектов / А. М. Батьковский, В. Я. Трофимец // Современные научные исследования и разработки. – 2017. – № 3. – С. 25–30.

5. Овешникова, Л. В. Применение моделирования в инновационно-инвестиционном проектировании / Л. В. Овешникова, И. С. Лащенкова // Регион: системы, экономика, управление. – 2011. – № 4. – С. 175–180.

6. Шапкин, А. С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций / А. С. Шапкин. – 2-е изд. – Москва : Дашков и Ко, 2003. – 554 с. – (Экономическая библиотека). – URL: http://economy-lib.com/otsenka-riskov-realnyh-investitsionnyh-proektov#ixzz5odr9qMYx

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ КАЗАНИ

Р. Н. Рафиков, З. Я. Якупов*

Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ,
г. Казань, Россия
E-mail: railrafikov98@mail.ru; zymat@bk.ru

Город Казань является столицей одного из субъектов Российской Федерации – Республики Татарстан. Казань – многонациональный город с достаточно большим населением: здесь живут более миллиона человек ста одной национальности. Многонациональность и вытекающая из неё разница культур, являющиеся исторической характеристикой Казани, создают неповторимое многообразие.

Город Казань в начале XXI века отпраздновал свою грандиозную годовщину, а именно: тысячелетие существования. Это – настоящая гордость не только для сителей Республики Татарстан, но и всей нашей многонациональной Родины. Интересным фактом является то, что город называют «третьей столицей России». Это объясняется стремительным развитием инфраструктуры и различных сфер общественной жизни. Выделяют главную особенность города Казань – население. Оно несколько отличается от жителей большинства российских городов. Здесь люди имеют свои традиции, называют себя «настоящими татарами мира». За свою историю город «родил» немало чемпионов и людей, которыми гордится вся Россия. Так, за последние четыре года Казань подарила миру лучших спортсменов, достигших феноменальных результатов в фехтовании, тяжелой атлетике и в волейболе.

Численность населения является важным показателем социально-экономической характеристики любого города, поскольку население является основной производительной силой и потребителем материальных благ каждого конкретного города. Поэтому, чтобы принять какое-либо решение, результат которого напрямую зависит от численности населения, человек обращается к прогнозам. Прогнозы позволяют оценить будущее демографическое состояние города, направления его развития.

Численность населения представляет собой нелинейную динамическую систему. Для анализа поведения таких систем существует два подхода: аналитический и статистический. Аналитический подход подразумевает построение непосредственно математической модели. Как правило такие модели представляют собой системы дифференциальных уравнений. Получить аналитическое решение таких систем практически невозможно и тогда прибегают к численным методам. Основной недостаток численных методов решения заключается в том, что они требуют больших вычислительных ресурсов. Для применения статистического подхода так же требуются вычислительные ресурсы (но не в таких больших объемах, как при аналитическом подходе), требуются и большие объёмы данных. Именно малое количество данных ранее не позволяло исследователям использовать статистику. В настоящее время, с развитием технологий сбора данных, объём обрабатываемой информации колоссален; и практически все данные уже представлены в цифровом виде. Вычислительные возможности современных компьютеров выросли во много раз. Это позволило использовать статистическую обработку больших объёмов данных для различных исследований.

Метод наименьших модулей (МНМ) – один из статистических методов исследования зависимости случайной величины от некоторого числа переменных [1].

С помощью МНМ для расчётов используются известные результаты изменения численности населения города Казань с 1999 г. по 2018 г. [2]. Полученный результат сравнивается с численностью населения на начало 2019 года, и прогнозируется численность населения на 2020 год.

Сначала табличные данные интерполируются в виде полиномиальной функции. Далее рассматривается экстраполяция по МНМ. Для этого строятся графики полиномиальных функций различных порядков для прогнозирования численности населения в 2020 г.. Получаются P2, P3, P4 – результаты по экстраполяции: P2=1285200, P3=1283800, P4=1265600.

Результат P2 описывается полиномом второго порядка, P3 – третьего, P4 – четвертого (рис. 1). Реальная численность населения в 2019 г. равна 1251969. И, значит, наиболее точным значением численности населения в 2019 г. (по при-ближению) является P4=1260500.

Поэтому прогнозируемая численность населения Казани в 2020 г. составит примерно 1265600 человек.

Рис. 1. График прогноза численности населения (г. Казань) в 2020 г.

МНМ часто применяется для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и оказывается полезным при обработке наблюдений.

Библиографический список

1. Якупов, З. Я. Метод наименьших квадратов и наименьших модулей в научно-технических расчётах : учеб. пособие / З. Я. Якупов, Р. К. Галимова. – Казань : Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. – 140 с.

2. Население Казани. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%81%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%9A%D0%B0%D0%B7%D0%B0%D0%BD%D0%B8 (дата обращения 07.04.2019).

МОДЕЛЬ «ВОЛНЫ БЕГСТВА И ПОГОНИ» И «ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ» В МОДЕЛИ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА»

А. В. Гульманова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: gulmanovaalina77@mail.ru

Влияние структуры и климатических условий ареалов, являющихся средой обитания различных животных, а также растений, на изменения параметров численности и географического распространения дан-

ных объектов, стоит на одном из первостепенных мест при исследовании окружающей нас среды. Не менее важная роль отводится типам взаимодействий между видами и характеру подвижности особей.

Известное броуновское движение молекул можно привести в пример при описании перемещения особей, причем именно это перемещение является случайным. В связи с этим оказывается возможным описание перемещения особей с помощью уравнений диффузии. При этом делается предположение о пропорциональности скорости перемещения особей определенного вида градиенту концентрации особей этого вида (закон Фика).

Существуют как случайные перемещения живых организмов, так и направленные, другими словами положительный и отрицательный таксис. На скорость перемещения в данном случае влияет как концентрация определенного вида, так и градиент важного для этого вида фактора – например, пища или свет.

В системе «хищник-жертва» роль пищи играют особи вида-жертвы. Зачастую скорость перемещения одного вида – хищника определяется градиентом концентрации другого вида - жертвы. Это показывает зависимость коэффициента диффузии одной переменной системы от концентрации другой переменной (кросс-диффузия).

Существует взаимосвязь перемещений с направленным движением среды, в которой находятся особи того или иного вида. Это могут быть, например, приливы или течения, если говорить о водной среде. Еще одна возможность – когда перемещение зависит не от скорости, а от ускорения движения хищников и градиента плотности жертв. При такой зависимости происходит проявление того, что движение осуществляется поведенческими реакциями, а формирование скоплений особей происходит на значительно более коротких временах, чем характерное время воспроизводства популяции. Все эти явления могут быть описаны с помощью уравнений в частных производных.

Модель одного из этих процессов «волна - бегство и погоня» отражает простейшая вольтерровская модель «хищник–жертва». Для облегчения понимания и расчетов будем считать, что миграция хищников и жертв внутри своей группы носит характер диффузии (случайные блуждания).

Тогда поведение системы можно описать при помощи дифференциальных уравнений параболического типа:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = c_1 x_1 - a_{12} x_1 x_2 + \frac{D \partial^2 x_1}{\partial r^2}, \; \frac{\partial x_2}{\partial t} = a_{21} x_{21} x_2 - c_2 x_2 + \frac{D_2 \partial^2 x_2}{\partial r^2}$$

Здесь x_1, x_2 – плотность популяций жертв и хищников, D_1, D_2 – соответствующие коэффициенты «диффузии».

Поведение переменных в каждой точке пространства определяется двумя типами процессов: взаимодействием компонентов и их простран-

ственным перемещением. Изучение периодических и асимптотических решений данной системы были осуществлено Чоу и Тамом (Chow and Tam, 1976).

При рассмотрении колебаний малой амплитуды и колебаний вблизи стационарного состояния без ограничений амплитуды выявлены периодические пространственно-однородные решения системы уравнений Вольтера «хищник–жертва» для двух популяций в ограниченном ареале. Это означает, что замкнутая система с миграцией внутри ее не приводит к качественно новым эффектам. В случае неограниченности ареала, в системе могут возникать решения в виде движущихся волн. Решение задачи упрощается, если считать, что задача одномерна, и принять $D_1 = 0$ (т.е. миграция жертв отсутствует). Этот случай рассматривается при ситуации, когда подвижность жертв существенно меньше подвижности хищников. Введя новые переменные,

$$\phi_1 = \frac{-c_2 x_1}{a_{21}},\ \phi_1 = \frac{c_1 x_2}{a_{12}}$$

уравнения можно записать в виде

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = c_1 \phi_1 (1 - \phi_2),\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{D_2 \partial^2 \phi_2}{\partial r^2} + c_2 \phi_2 (\phi_1 - 1)$$

где r – пространственная переменная. Интегрируя данное уравнение, находим

$$\phi_1(t\ , r) = f_1(r) \exp\left\{ c_1 t - c_1 \int_0^t \phi_2(\tau, r) d\tau \right\},$$

где $f_1(r)$ – начальное распределение жертв.

На рис. 1 представлено распределение плотностей популяции жертв φ1 и хищников φ2 в фиксированный момент времени – «волну погони и бегства», как называли ее Чоу и Там (Chow and Tam, 1976).

Формирование волн численности хищника в различные моменты времени в случае малой подвижности жертв отражено на рис. 2.

Распространение в пространстве живых организмов и занятие ими нового ареала является результатом стремления к росту и размножению. Распространение жизни можно сравнить с распространением пламени по степи, когда начинается пожар. Даная метафора наглядно показывает, что описание пожара (распространение пламени по бикфордову шнуру) осуществляется с помощью той же базовой модели, как и распространение вида. Знаменитая в теории горения модель ПКП (Петровского - Колмогорова - Пискунова) впервые была предложена ими в 1937 г. именно в биологической постановке как модель распространения доминирующего вида в пространстве.

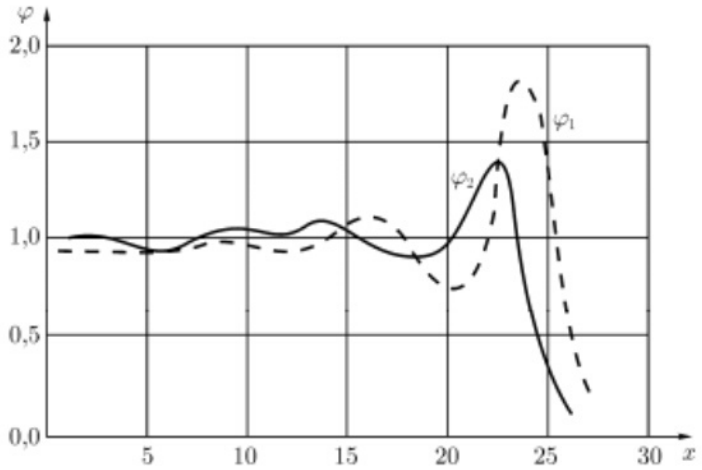


Рис. 1. Распределение плотности популяции хищников (φ 2) и жертв (φ1) в пространстве (переменная x) (Chow and Tam, 1976)

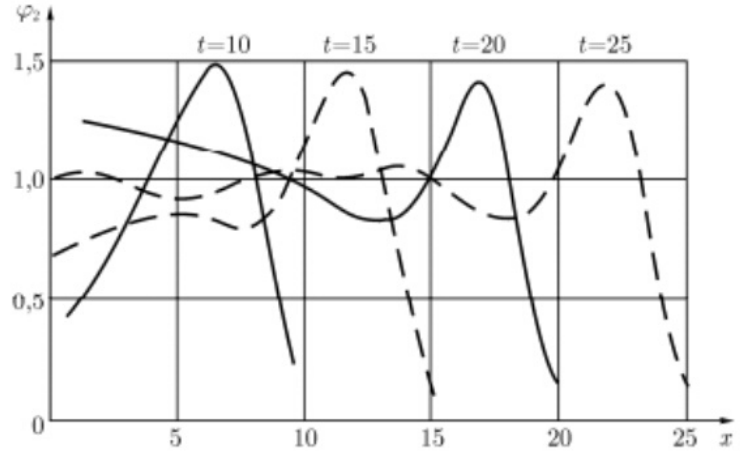


Рис. 2. Распределение плотности популяции хищников (φ2) в пространстве (x) в различные моменты времени в случае малой подвижности жертв – волна погони (Chow and Tam, 1976)

Интересно рассмотрение постановки задачи о распространении живых организмов в активной, а именно богатой энергией (пищей) среде. В качестве базы рассмотрим то, что в любой точке прямой $r > 0$ размножение вида описывается функцией $f(x) = x(1 - x)$. В начальный момент времени $t = 0$ вид начинает диффундировать вправо с константой диффузии D. Составляем описание данного процесса уравнением:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x) + D\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

Если $t > 0$, то в данной системе начинает концентрироваться волна в область $r > 0$, которая является результатом двух процессов:

– перемещение особей диффузно;

– размножение особей на основе описательной функции $f(x)$.

Со временем фронт волны перемещается вправо, при этом происходит приближение его формы к определенной предельной форме. Ско-

рость перемещения волны определяется коэффициентом диффузии и формой функции $f(x)$ и для функции $f(x)$, равной 0 при $x = 0$ и $x = 1$ и положительной в промежуточных точках, выражается формулой: $\lambda = 2\sqrt{D \cdot f'(0)}$.

Таким образом, при изучении пространственного перемещения в модели «хищник-жертва» можно обозначить факты того, что неограниченное пространство является базой для распространения волны «бегства и погони», а ограниченное пространство способствует установлению стационарных пространственно-неоднородных структур (диссипативных) или автоволн, в зависимости от того, какие присутствуют параметры системы.

Библиографический список

1. Базыкин, А. Д. О диссипативных структурах в экологических системах / А. Д. Базыкин, Г. С. Маркман // Факторы разнообразия в математической экологии и популяционной генетике. – Пущино : ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1980. – С. 135–148.

2. Березовская, Ф. С. Модель динамики популяций с неподвижным аттрактантом: Решения типа «бегущие волны» / Ф. С. Березовская, Г. П. Карев // Математика. Компьютер. Образование : сб. тезисов. – Вып. 6. – Москва ; Ижевск : ИКИ-РХД, 1999. – С. 444–449.

3. Тютюнов, Ю. В. Математическая модель активных миграций как стратегии питания в трофических сообществах / Ю. В. Тютюнов, Н. Ю. Сапухина, А. Б. Моргулис, В. Н. Говорухин // Журнал общей биологии. – 2001. – № 62 (3). – С. 253–262.

4. Тютюнов, Ю. В. Явная модель поискового поведения хищника / Ю. В. Тютюнов, Н. Ю. Сапухина, И. Н. Сенина, Р. Ардити // Журнал общей биологии. – 2002. – № 63 (2). – С. 137–148.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Т. Ф. Мамедова, А. Д. Якунина

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва,
г. Саранск, Россия,
E-mail: mamedovatf@yandex.ru, jak.69@mail.ru

В математической экономике рассматривается большое количество задач оптимального управления, касающихся динамических моделей оптимального распределения ресурсов, в частности, к таким задачам

относятся задачи экономического роста. Математики совместно с экономистами занимаются изучением факторов, влияющих на устойчивый экономический рост экономики, который способствует улучшению уровня жизни населения. Многие ученые считают, что научно-технические прорывы, инновационные технологии, автоматизация производства являются существенным фундаментом высоких темпов роста экономики в долгосрочном периоде [1-4]. Следовательно, становится актуальным использование моделей экономического роста, одной из которых является модель Солоу, в основу которой закладывается техногенный прогресс. Используя математические модели и рассчитывая определенные показатели, существует возможность получения результатов вычислений, применение которых на практике приводит к устойчивому экономическому росту [5].

Модель Солоу - это модель роста, которая рассматривает экзогенные сбережения в качестве главной движущей силы экономики. Здесь три производственных фактора: капитал, труд и технология. Модель Солоу предполагает постоянный темп роста населения и технологический прогресс. В Основе модели Солоу находится производственная функция Кобба-Дугласа, с добавлением важного фактора экономического роста – техногенного прогресса.

Модель Солоу используют в целях:

– исследования стабильного экономического роста, влияния различных факторов на темпы экономического роста;

– определения максимального дохода на душу населения и наибольшего объема потребления при заданных начальных условиях;

– анализа влияния увеличения численности работников и новых технологий на производственный процесс.

Применяемая в модели производственная функция

$$Y = F(K, L) = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta},$$

показывает зависимость объёма продукции Y от количества факторов производства: трудовых ресурсов L и запасов капитала K.

Будем использовать следующий алгоритм вычислительного процесса по модели Солоу [6]:

1) Рассмотрим изменяющиеся во времени показатели трудовых ресурсов L и запасов капитала K, для определения устойчивого экономического роста.

2) Запишем модель Солоу в удельных показателях, которые характеризуют объем производства Y на единицу трудовых ресурсов L и получим уравнение, задающее изменения фактора капитала на единицу трудовых ресурсов, которое является базовым дифференциальным уравнением модели Солоу:

$$\dot{k} = sf\left(k\right) - \left(n + \delta\right)k;$$

3) Определим устойчивый уровень капиталовооруженности, используя формулу рассмотрим 3 случая для значения $\dot{k}$:

а) $\dot{k} > 0$ – означает, что объем капитала является избыточным. Необходим переход к более инновационным технологиям.

б) $\dot{k} < 0$ – означает, что уровень требуемых инвестиций превышает уровень сбережения. Следовательно, существует необходимость перехода к менее инновационным технологиям.

в) $\dot{k} = 0$ – означает, что уровень капиталовооруженности устойчивый, данный уровень характеризует состояние равновесия в экономике.

4) Вычислим норму сбережения s_g, при которой уровень потребления c_g будет максимальным и получаем золотое правило накопления. Золотое правило накопления имеет вид:

$$\frac{df}{dk} - \left(\delta + n\right) = 0;$$

Отсюда получим капиталовооруженность k_g, которой соответствует наибольшее возможное потребление

5) Добавим в производственную функцию фактор техногенного прогресса А:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{F}\left(\mathrm{K},\ \mathrm{L} \cdot \mathrm{A}\right),$$

где LA обозначает эффективность труда, которая указывает на результативность труда при меньших затратах рабочей силы, то есть с условием техногенного прогресса. Модель Солоу с учетом важного фактора техногенного прогресса примет вид:

$$\frac{Y}{LA} = \tilde{y} = \frac{F(K,\ LA)}{LA} = F\left(\frac{K}{LA}, 1\right) = f\left(\tilde{k}\right),$$

где $\tilde{y}$ обозначает объем продукции и $\tilde{k}$ определяет капиталовооруженность на эффективную единицу труда. С учётом технического прогресса $K = k \cdot L \cdot A$, следовательно, дифференциальное уравнение динамики капитала примет вид:

$$\dot{\tilde{k}} = \mathrm{sf}\left(\tilde{k}\right) - \left(n + \delta + g\right)\tilde{k},$$

где $g = \frac{\dot{A}}{A}$.

$$\mathrm{sf}\left(\tilde{k}^*\right) = \left(n + \delta + g\right)\tilde{k}^*,$$

где $\tilde{k}^*$ устойчивый уровень капиталовооруженности на эффективную единицу труда.

Объем производства с учетом новых показателей составит:

$$Y = f\left(\tilde{k}_g\right) \cdot L \cdot A$$

Высокий уровень капиталовооруженности в устойчивом состоянии и высокий уровень выпуска на душу населения характеризуются большей нормой сбережения. Из повышения нормы сбережения следует повышение запасов капитала сопровождающегося высоким уровнем производства. Однако, в долгосрочном периоде темп экономического роста не зависит от роста нормы сбережений. Модель Солоу показывает, что экономический рост в долгосрочном периоде зависит от технического прогресса. Высокий уровень технического прогресса способствует появлению инновационной технике с новыми возможностями, которые облегчают процесс производства, новых управленческих форм науки, маркетинга.

В качестве первого примера рассмотрим предприятие базирующееся на изготовлении мягкой мебели премиум класса. Известно, что главные макроэкономические показатели предприятия имеют следующие значения: объем капитала K = 3750, *к*оличество трудовых ресурсов L = 1250; эффективность труда одного работника A = 2; *а*мортизация $\delta = 0{,}1$; темп роста населения $n = 0{,}1$; темп технического прогресса $g = 0{,}1$.

Тогда объем продукции предприятия определяется производственной функцией:

$$Y = 2 \cdot K^{0,75} \cdot L^{0,25};$$

Доход мебельной фабрики составляет:

$$Y = 2 \cdot 3750^{0,75} \cdot 1250^{0,25} = 5698,767;$$

Используя алгоритм вычислительного процесса по модели Солоу, максимизируем доход производства и определим соответствующие ему величины. Объем производства с учетом новых показателей составит:

$$Y = f\left(\tilde{k}_g\right) \cdot L \cdot A = 39062,5;$$

Очевидно, что новые показатели, вычисленные по алгоритму применения модели Солоу, привели к увеличению объема производства.

В качестве второго примера рассмотрим то же предприятие, но изменим долю количества трудовых ресурсов и объема капитала: объем капитала $K = 2500$, *к*оличество трудовых ресурсов $L=2500$. Тогда производственная функция примет вид:

$$Y = 2 \cdot K^{0,50} \cdot L^{0,50};$$

Доход мебельной фабрики составит:

$$Y = 2 \cdot 2500^{0,50} \cdot 2500^{0,50} = 5000;$$

Используя алгоритм вычислительного процесса по модели Солоу, максимизировав доход производства и определив соответствующие ему величины, получим, объем производства с учетом новых показателей :

$$Y = f\left(\tilde{k}_g\right) \cdot L \cdot A = 8500;$$

Очевидно, что новые показатели, вычисленные по алгоритму модели Солоу, привели к увеличению объема производства.

Таким образом, сравнивая результаты проведения вычислительного процесса по модели Солоу, полученные в примерах, заметим что основное отличие здесь связано с изменением доли объема капитала и количества трудовых ресурсов входящих в производственную функцию. Следовательно, для максимизации объема производства и улучшения жизни население необходимо изменять структуру производственной функции. Это связано с важнейшим фактором модели Солоу - техногенным прогрессом. Увеличение объема капитала и переход на более инновационные технологии, модернизация производства приводят к экономическому росту.

Библиографический список

1. Асеев, С. М. Задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом и их приложения в теории экономического роста / С. М. Асеев. – Москва : МАКС Пресс, 2009. – 148с.

2. Абрамов, А. П. Физика и математическая экономика / А. П. Абрамов, Ю. П. Иванилов. – Москва : Знание, 1991. – 32с.

3. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – Москва : Физматлит, 2005. – 320 с.

4. Мамедова, Т. Ф. Оптимизация процесса управления динамикой нелинейной системы и её численная реализация / Т. Ф. Мамедова, О. Е. Каледин, В. Г. Шабанова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2018. – Т. 6, № 1 (20). – С. 140–152.

5. Мамедова, Т. Ф. Модель управления финансово-экономической деятельностью производственного предприятия агропромышленного комплекса / Т. Ф. Мамедова, В. Г. Шабанова, Г. И. Шабанов // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 3–1. – С. 67–71.

6. Мамедова, Т. Ф. Математическое обеспечение модели оптимального управления экономикой отрасли / Т. Ф. Мамедова, О. Е. Каледин, В. Г. Шабанова // Современные наукоемкие технологии. – 2016. – № 7-1. – С. 89–93.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

ОБ ОДНОЙ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ[1]

И. К. Искандаров, Х. Х. Имомназаров[*], С. К. Куйлиев[**]

Тихоокеанский государственный университет,
г. Хабаровск, Россия;
[*]Институт вычислительной математики
и математической геофизики Сибирского отделения РАН,
г. Новосибирск, Россия;
[**]Самаркандский государственный университет,
г. Самарканд, Узбекистан
E-mail: iskandarovilkham@mail.ru; imom@omzg.sscc.ru

Введение

Моделирование течений многофазных сжимаемых сред представляет интерес с точки зрения многих научных дисциплин и имеет большой потенциал для практического применения в различных инженерных областях. Задачи моделирования многофазных течений встречаются в таких областях, как метеорология и океанология, а также при описании различных геологических процессов с использованием гидродинамического подхода, таких как конвективный массоперенос мантийных пород, фильтрационные течения и др.

Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область R^2 с липшицевой непрерывной границей Γ, а Ω' – дополнение к $\overline{\Omega}$. Рассмотрим стационарную систему двухжидкостной среды с равновесием фаз по давлению ([1]):

$$\nu_1 \Delta \boldsymbol{u}_1 - \mathbf{grad}\, p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 = 0 \text{ в } \Omega', \tag{1}$$

$$\nu_2 \Delta \boldsymbol{u}_2 - \mathbf{grad}\, p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_2 = 0 \text{ в } \Omega', \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \mathbf{q}_1, \ \boldsymbol{u}_2 = \mathbf{q}_2 \text{ на } \Gamma, \tag{3}$$

где $\mathbf{u}_i$, i = 1, 2, обращаются в нуль на бесконечности и удовлетворяют соотношениям

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-51-41002).

$$\int_{\Omega'} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \, dx < \infty, \ \int_{\Omega'} \frac{1}{\omega^2} \|\mathbf{u}\|^2 \, dx < \infty$$

для соответствующей весовой функции ω, которая зависит от размерности ([2]). Массовая сила $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ задана в двойственном пространстве скоростей, а граничные значения $\mathbf{q}_i$, $i = 1, 2$, принадлежат пространству $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^2$. Как обычно, сдвиговые вязкости фаз ν_1, ν_2 являются положительными постоянными, **grad** – оператор градиента по $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, ρ_1 и ρ_2 – парциальные плотности фаз соответственно. Через $\mathbf{\Delta}$ и Δ будем обозначать векторный и скалярный операторы Лапласа соответственно, так что

$$\mathbf{\Delta v} > -\mathbf{rotrot\, v} + \mathbf{grad}\, \mathrm{div}\, \mathbf{v}, \ \Delta\varphi = \mathrm{div}\, \mathbf{grad}\varphi.$$

Вариационная постановка

В данном пункте будем выполнять преобразования, связанные с системой (1) - (3), предполагая, что все функции обладают необходимой гладкостью. Заметим, что правые части дивергентных уравнений в (1) и (2) должны удовлетворять определенным условиям согласования. Действительно, применяя формулу векторного анализа $\mathrm{div}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = 0$, получим, что

$$\mathrm{div}\mathbf{\Delta v} = \mathrm{div}\, \mathbf{grad}(\mathrm{div}\, \mathbf{v}) = \Delta(\mathrm{div}\, \mathbf{v}). \qquad (4)$$

Далее, действуя на первые векторные уравнения в (1) и (2) оператором дивергенции, получим уравнение

$$\Delta p = \rho \mathrm{div}\, \mathbf{f}.$$

Граничные функции $\mathbf{q}_i$ в (3) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n} \, ds = 0, \ i = 1, 2, \qquad (5)$$

где $\mathbf{n}$– единичный вектор внешней нормали к границе Γ.

Следуя [2-4], введем следующие пространства Соболева

$$W_0^1(\Omega') = \left\{ u \in \mathrm{D}'(\Omega') : (\lg r)^{-1} u \in L^2(\Omega'), \nabla u \in L^2(\Omega') \right\},$$

$$W_0^2(\Omega') = \left\{ u \in \mathrm{D}'(\Omega') : \rho(r)^{-2} (\lg r)^{-1} u \in L^2(\Omega'), \right.$$

$$\left. \rho(r)^{-1} (\lg r)^{-1} \nabla u \in L^2(\Omega'), D^2 u \in L^2(\Omega') \right\},$$

$$W_1^1(\Omega')=\left\{u\in \mathrm{D}'(\Omega'): u\in L^2(\Omega'), \rho(r)\nabla u\in L^2(\Omega')\right\},$$

$$W_{-1}^1(\Omega')=\left\{u\in \mathrm{D}'(\Omega'): \rho(r)^{-2}u\in L^2(\Omega'), \rho(r)^{-1}\nabla u\in L^2(\Omega')\right\}.$$

Все эти пространства снабжены своими естественными нормами и полунормами: $\rho(r)=(1+r^2)^{\frac{1}{2}}$ и $\lg r=\ln(1+r^2)$, где $r=r(x)$ - расстояние до начала координат.

Как известно ([2]), пространство $W_1^1(\Omega')$ не содержит многочленов, пространства $W_0^1(\Omega')$ и $W_{-1}^1(\Omega')$ содержат P_0, а пространство $W_0^2(\Omega')$ содержит P_1.

Теперь перейдем к неоднородной внешней задаче Стокса для системы уравнений двухскоростной гидродинамики. Так как

$$\mathbf{f}\in\left(W_0^{-1}(\Omega')\right)^2,\ \mathbf{q}_i\in\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^2 \text{ и } \nu_i>0,\ i=1,2,$$

можно найти $\mathbf{u}_i\in\left(W_0^1(\Omega')\right)^2$ и $p\in L^2(\Omega')$ такие, что

$$\nu_1\Delta\boldsymbol{u}_1-\mathbf{grad}\,p=-\rho\mathbf{f},\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1=0 \text{ в } \Omega', \tag{6}$$

$$\nu_2\Delta\boldsymbol{u}_2-\mathbf{grad}\,p=-\rho\mathbf{f},\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_2=0 \text{ в } \Omega', \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u}_1=\mathbf{q}_1,\ \boldsymbol{u}_2=\mathbf{q}_2 \text{ на } \Gamma. \tag{8}$$

Как и в ограниченном случае, задача (6)–(8) имеет эквивалентную вариационную формулировку:

Найти $\mathbf{u}_i\in\left(W_0^1(\Omega')\right)^2$ и $p\in L^2(\Omega')$ такие, что

$$\nu_1(\nabla\mathbf{u}_1,\nabla\mathbf{v}_1)-(p,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_1)=\rho\langle\mathbf{f},\mathbf{v}_1\rangle\quad\forall\mathbf{v}_1\in\left(\overset{0}{W}{}_0^1(\Omega')\right)^2, \tag{9}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}_1=0\quad\text{в}\quad\Omega', \tag{10}$$

$$\mathbf{u}_1\big|_\Gamma=\mathbf{q}_1 \text{ на } \Gamma, \tag{11}$$

$$\nu_2(\nabla\mathbf{u}_2,\nabla\mathbf{v}_2)-(p,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_2)=\rho\langle\mathbf{f},\mathbf{v}_2\rangle\quad\forall\mathbf{v}_2\in\left(\overset{0}{W}{}_0^1(\Omega')\right)^2, \tag{12}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}_2=0\quad\text{в}\quad\Omega', \tag{13}$$

$$\mathbf{u}_2\big|_{\Gamma} = \mathbf{q}_2 \text{ на } \Gamma. \tag{14}$$

Ввиду условия inf-sup ([5, 6])

$$\inf_{p\in L^2(\Omega')} \sup_{\mathbf{w}\in\left(\overset{0}{W}{}^{1}_{0}(\Omega')\right)^2} \frac{\int_{\Omega'} p\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}\,dx}{\|p\|_{0,\Omega'}\|\mathbf{w}\|_{1,0,\Omega'}} \geq \frac{1}{K},$$

где K – положительная постоянная.

Следовательно, задача (9)-(14) эквивалентна следующей задаче:

Найти $\mathbf{u}_i \in \left(W_0^1(\Omega')\right)^2$ такие, что

$$\nu_1(\nabla\mathbf{u}_1, \nabla\mathbf{v}_1) = \rho\langle\mathbf{f}, \mathbf{v}_1\rangle \quad \forall\mathbf{v}_1 \in V, \tag{15}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{16}$$

$$\mathbf{u}_1\big|_{\Gamma} = \mathbf{q}_1 \text{ на } \Gamma, \tag{17}$$

$$\nu_2(\nabla\mathbf{u}_2, \nabla\mathbf{v}_2) = \rho\langle\mathbf{f}, \mathbf{v}_2\rangle \quad \forall\mathbf{v}_2 \in V, \tag{18}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{19}$$

$$\mathbf{u}_2\big|_{\Gamma} = \mathbf{q}_2 \text{ на } \Gamma. \tag{20}$$

В формулах (15) и (18) через V обозначено гильбертово пространство:

$$V = \left\{\mathbf{v} \in \left(\overset{0}{W}{}^{1}_{0}(\Omega')\right)^2 : \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega'\right\}.$$

В данной работе доказана следующая

Теорема. Предположим, что область $\Omega \subset R^2$ имеет непрерывную липшицеву границу Γ, которая не обязательно является связной, но не имеет внутренней связной компоненты. Тогда для массовой силы $\mathbf{f}$, заданной в пространстве $\left(W_0^{-1}(\Omega')\right)^2$ и функций $\mathbf{q}_i$, i = 1, 2, заданных в пространстве $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^2$, задача (1)–(3) имеет единственное решение $(\mathbf{u}_i, p) \in \left(W_0^1(\Omega')\right)^2 \times L^2(\Omega')$, которое непрерывно зависит от данных, т.е.

$$\|\mathbf{u}_i\|_{1,0,\Omega'} + \|p\|_{0,\Omega'} \leq C\left[\|\mathbf{f}\|_{-1,0,\Omega'} + \|\mathbf{q}_i\|_{\frac{1}{2},\Gamma}\right].$$

Заключение

Таким образом, для исходной переопределенной системы (1)–(3) установлена вариационная постановка задачи. Показано, что вариационная задача для системы уравнений двухскоростной гидродинамики корректна в соответствующем пространстве Соболева.

Библиографический список

1. Имомназаров, Х. Х. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением / Х. Х. Имомназаров, Ш. Х. Имомназаров, М. М. Маматкулов, Е. Г. Черных // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 60–66.

2. Girault, V. A Well-Posed Problem for the Exterior Stokes Equations in Two and Three Dimensions / V. Girault, A. Sequeira // Arch. Rational Mech. Anal. – 1991. – Vol. 114. – P. 313–333.

3. Демиденко, Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. – Новосибирск : Научная книга, 1998.

4. Girault, V. Finite element methods for Navier-Stokes equations / V. Girault and P.-A. Raviart. – Berlin : Springer-Verlag, 1986.

5. Babushka, I. The finite element method with Lagrangian multipliers / I. Babushka // Numer. Math. – 1973. – Vol. 20. – P. 179–192.

6. Brezzi, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers / F. Brezzi // R.A.I.R.O., Anal. – 1974. – Numer. R2. – P. 129–151.

РЕГУЛЯРНОСТЬ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ[1]

И. К. Искандаров, Х. Х. Имомназаров[*], С. К. Куйлиев[**]

Тихоокеанский государственный университет,
г. Хабаровск, Россия;
[*]Институт вычислительной математики
и математической геофизики Сибирского отделения РАН,
г. Новосибирск, Россия;
[**]Самаркандский государственный университет,
г. Самарканд, Узбекистан
E-mail: iskandarovilkham@mail.ru; imom@omzg.sscc.ru

Введение

Моделирование течений многофазных сжимаемых жидкостей является важной задачей для научной, экологической, экономической, ин-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-51-41002).

дустриальной и многих других сфер. Задачи моделирования многофазных течений также встречаются в таких областях как метеорология и океанология, а также при описании различных геологических процессов с использованием гидродинамического подхода, таких, как конвективный массоперенос мантийных пород, фильтрационные течения и др.

Постановка задачи

Рассмотрим стационарную систему двухжидкостной среды с равновесием фаз по давлению на плоскости ([1]):

$$\nu_1 \Delta \boldsymbol{u}_1 - \mathbf{grad}\, p = -\rho \mathbf{f}, \quad \text{div}\ \boldsymbol{u}_1 = 0 \text{ в } R^2, \tag{1}$$

$$\nu_2 \Delta \boldsymbol{u}_2 - \mathbf{grad}\, p = -\rho \mathbf{f}, \quad \text{div}\ \boldsymbol{u}_2 = 0 \text{ в } R^2, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}_i = \left(u_{i1},\ u_{i2}\right)$, i=1,2, $\mathbf{f} = \left(f_1, f_2\right)$, как обычно, сдвиговые вязкости фаз ν_1, ν_2 являются положительными постоянными, **grad** – оператор градиента по $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2\right)$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, ρ_1 и ρ_2 – парциальные плотности фаз соответственно. Через $\boldsymbol{\Delta}$ и Δ будем обозначать векторный и скалярный операто р ы Лапласа соответственно

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v} > -\mathbf{rotrot}\,\mathbf{v} + \mathbf{grad}\,\text{div}\,\mathbf{v},\ \Delta\varphi = \text{div}\,\mathbf{grad}\,\varphi.$$

Регулярность задачи

Следуя [2, 3], вводим пространства:

$$X_1^0(R^2) = \left\{ f \in W_0^{-1}(R^2);\, x_i f \in L^2(R^2), i = 1,2;\, f \in L^2_{loc}(R^2) \right\},$$

$$X_1^{-1}(R^2) = \left\{ f \in W_0^{-2}(R^2);\, x_i f \in W_0^{-1}(R^2), i = 1,2;\, f \in H^{-1}_{loc}(R^2) \right\},$$

и их двойственные пространства $X_{-1}^0(R^2)$ и $X_{-1}^1(R^2)$ соответственно.

Свойства этих пространств, установленые в [3], показывают, что

$$X_1^0(R^2) = \left\{ f \in W_0^{-1}(R^2);\, f \in W_1^0(R^2) \right\},$$

и, следовательно, $X_1^0(R^2)$ является соответствующим подпространством $W_1^0(R^2)$, так как $W_1^0(R^2) \subset W_0^{-1}(R^2)$. Кроме того, установлено, что полиномиальное пространство P_1 содержится в $X_{-1}^1(R^2)$. Также доказано, что константы содержатся в $X_{-1}^0(R^2)$.

Необходимым условием решения задачи Стокса для односкоростной гидродинамики в R^2 является следующее условие ([2]):

$$\mathbf{f} \perp R^2.$$

Далее, пусть функция $\mathbf{f} \in \left(W_0^{-1}(R^2)\right)^2$ такая, что

$$\rho\mathbf{f} = -\nu_1\Delta\mathbf{u}_1 + \nabla p \quad \text{в} \quad R^2,$$

$$\rho\mathbf{f} = -\nu_2\Delta\mathbf{u}_2 + \nabla p \quad \text{в} \quad R^2$$

с $\mathbf{u}_i \in \left(W_0^1(R^2)\right)^2$ и $p \in L^2(R^2)$. Тогда

$$\rho\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1\rangle = \nu_1(\nabla\mathbf{u}_1, \nabla\mathbf{v}_1) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}_1), \quad \forall\mathbf{v}_1 \in \left(W_0^1(R^2)\right)^2,$$

$$\rho\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_2\rangle = \nu_2(\nabla\mathbf{u}_2, \nabla\mathbf{v}_2) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}_2), \quad \forall\mathbf{v}_2 \in \left(W_0^1(R^2)\right)^2,$$

и, так как $R \subset W_0^1(R^2)$, из этих соотношений и в силу положительности парциальных плотностей получим:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{c}\rangle = 0 \quad \forall\mathbf{c} \in R^2. \tag{3}$$

Кроме того, скорость $\mathbf{u}_i$ может быть определена только с точностью до аддитивной константы, поскольку отображение $v \mapsto \|\nabla v\|_{0,R^2}$ является нормой в фактор-пространстве $W_0^1(R^2)/R$, эквивалентной фактор-норме. Таким образом, принимая во внимание эти два замечания, мы можем так же, как и в [2] удостовериться в справедливости следующей леммы:

Лемма. *Каждая функция* $\mathbf{f} \in \left(W_0^{-1}(R^2)\right)^2$, *удовлетворяющая условию*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{c}\rangle = 0 \quad \forall\mathbf{c} \in R^2,$$

определяет единственное решение $\mathbf{u}_i \in \left(W_0^1(R^2)/R\right)^2$ *и* $p \in L^2(R^2)$ *такое, что*

$$-\nu_1\Delta\mathbf{u}_1 + \nabla p = \rho\mathbf{f} \quad \text{в} \quad R^2, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}_1 = 0 \text{ в } R^2,$$

$$-\nu_2\Delta\mathbf{u}_2 + \nabla p = \rho\mathbf{f} \quad \text{в} \quad R^2, \tag{5}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}_2 = 0 \text{ в } R^2,$$

и существуют постоянные C_i *такие, что*

$$\|\mathbf{u}_1\|_{\left(W_0^1(R^2)/R\right)}^2 + \|p\|_{0,R^2} \le C_1\|\mathbf{f}\|_{-1,0,R^2},$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\left(W_0^1(R^2)/R\right)}^2 + \|p\|_{0,R^2} \le C_2\|\mathbf{f}\|_{-1,0,R^2}.$$

Теперь возьмем $\mathbf{f} \in \left(X_1^0(R^2)\right)^2$ из (3). Тогда $\mathbf{f}$ также принадлежит пространству $\left(W_0^{-1}(R^2)\right)^2$, и поэтому задачи Стокса (4) и (5) имеют единственное решение $\mathbf{u} \in \left(W_1^0(R^2)/R\right)^2$ и $p \in L^2(R^2)$, так как давление p является решением уравнения Лапласа

$$\Delta p = \operatorname{div} \mathbf{f} \quad \text{в} \quad R^2. \tag{6}$$

Из результатов [2, 3] следует, что

$$\mathbf{f} \in \left(X_1^0(R^2)\right)^2 \Rightarrow \operatorname{div}\mathbf{f} \in X_1^{-1}(R^2)$$

и выполнено условие

$$\operatorname{div}\mathbf{f} \perp P_1.$$

Следовательно, мы можем применить к $\operatorname{div}\mathbf{f}$ следующий результат изоморфизма, установленного в [2, 3]: *оператор Лапласа* Δ *является изоморфизмом из пространства* $X_{-1}^1(R^2)/P_1$ *на пространство* $X_{-1}^{-1}(R^2)$. Другими словами, оператор Δ *является* изоморфизмом из пространства $X_1^1(R^2)$ на подпространство $X_{-1}^1(R^2)$, которое ортогонально к P_1. Это означает, что задача (6) имеет единственное решение $p \in W_1^1(R^2)$, совпадающее с давлением в задаче Стокса, и

$$\|p\|_{1,1,R^2} \le C_2 \|\operatorname{div}\mathbf{f}\|_{X_1^{-1}(R^2)} \le C_3 \|\mathbf{f}\|_{\left(X_1^0(R^2)\right)^2}. \tag{7}$$

Таким образом, скорости подсистем $\mathbf{u}_i$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$-\nu_i \Delta \mathbf{u}_i = \rho\mathbf{f} - \nabla p \quad \text{в} \quad R^2 \tag{8}$$

с правой частью $\rho\mathbf{f} - \nabla p \in \left(X_1^0(R^2\right)^2$ и

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{c} \rangle = 0, \quad \langle \nabla p, \mathbf{c} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{c} \in R^2.$$

Тогда $\mathbf{f} - \nabla p \in \left(\left(X_{-1}^0(R^2)/R^2\right)^2\right)'$ и из результатов [2, 3] следует, что уравнение (8) имеет единственное решение $\mathbf{u}_i \in \left(W_1^2(R^2)/R\right)^2$ и имеют место оценки

$$\|\mathbf{u}_1\|_{\left(W_1^2(R^2)/R\right)^2} \le C_4 \|\rho\mathbf{f} - \nabla p\|_{\left(X_1^0(R^2)\right)^2} \le C_5 \|\mathbf{f}\|_{\left(X_1^0(R^2)\right)^2},$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\left(W_1^2(R^2)/R\right)}^2 \le C_4 \|\rho\mathbf{f} - \nabla p\|_{\left(X_1^0(R^2)\right)}^2 \le C_5 \|\mathbf{f}\|_{\left(X_1^0(R^2)\right)}^2 .$$

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема. *Пусть* $\mathbf{f} \in \left(X_1^0(R^2)\right)^2$, *где* $\langle \mathbf{f}, \mathbf{c} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{c} \in R^2$. *Тогда решение* $(\mathbf{u}_i, p)$ *стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики имеет регулярность* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \left(W_1^2(R^2)/R\right)^2$, $p \in W_1^1(R^2)$ *и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_i\|_{\left(W_1^2(R^2)/R\right)}^2 + \|p\|_{1,1,R^2} \le \tilde{C}_i \|\mathbf{f}\|_{\left(X_1^0(R^2)\right)}^2, \ i = 1,2.$$

Заключение

Таким образом, исследована задача для стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики на плоскости R^2. Для неё установлена регулярность решений в специальных весовых соболевских пространствах.

Библиографический список

1. Имомназаров, Х. Х. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением / Х. Х. Имомназаров, Ш. Х. Имомназаров, М. М. Маматкулов, Е Г. Черных // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 60–66.

2. Girault, V. A Well-Posed Problem for the Exterior Stokes Equations in Two and Three Dimensions / V. Girault, A. Sequeira // Arch. Rational Mech. Anal. – 1991. – Vol. 114. – P. 313–333.

3. Giroire, J. Etude de Quelques Problemes aux Limites Exterieurs et Resolution par Equations Integrales / J. Giroire. – Paris : These, Universite Paris VI, 1987.

ЭФФЕКТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ В СПЕКТРАХ ДВОЙНОЙ ФОТОИОНИЗАЦИИ ДВУХЭЛЕКТРОННЫХ ПРИМЕСНЫХ ЦЕНТРОВ В КВАЗИНУЛЬМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ

В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, И. М. Мойко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: physics@pnzgu.ru; razumov_alex@mail.ru; irmojko@yandex.ru

Полупроводниковые наноструктуры являются уникальными объектами, в которых можно осуществлять управление энергетическим

спектром носителей заряда, создавая тем самым приборо-ориентированные структуры с наперед заданными характеристиками. Важной особенностью таких систем является сильная зависимость их физических свойств от наличия примесей [1,2], которые неизбежно возникают в процессе изготовления наноструктур. Особый интерес представляют двухэлектронные примесные состояния [3,4] в квантовых точках (КТ). Это связано с тем, что вследствие размерного ограничения по всем трём пространственным направлениям условия существования двухэлектронных примесных состояний в КТ более благоприятны в сравнении с объёмным полупроводником. В этом случае в запрещенной зоне образуются два энергетических уровня, разделенных на величину корреляционной энергии $\Delta E = E_2 - E_1$, где E_1 и E_2 – первый и второй потенциалы ионизации двухэлектронного примесного центра (ДПЦ). Интерес к такому типу примесей связан с возможностью наблюдения одной из фундаментальных реакций – процесса двойной фотоионизации примесного атома одним фотоном [4]. Наличие внешних полей дает дополнительные степени свободы для управления электронными корреляциями в квантовых точках. Это важно для практических приложений, в частности, при разработке кубитов, а также фотоприемников с управляемой чувствительностью.

Целью данной работы является теоретическое исследование особенностей двойной фотоионизации ДПЦ во внешних магнитном и электрическом полях соответственно в квазинульмерной структуре с учетом дисперсии характерных размеров КТ.

В дипольном приближении во втором порядке теории возмущений получены аналитические выражения для коэффициентов поглощения света при фотоионизации двухэлектронных примесных центров в квазинульмерной структуре во внешнем магнитном поле. Предполагалось, что дисперсия u размеров КТ возникает в процессе фазового распада пересыщенного твердого раствора и удовлетворительно описывается формулой Лифшица – Слезова [5]:

$$P(u) = \begin{cases} \dfrac{3^4 e u^2 \exp\left[-1/(1-2u/3)\right]}{2^{\frac{5}{3}}(u+3)^{\frac{7}{3}}(3/2-u)^{\frac{11}{3}}}, & u < \dfrac{3}{2}, \\ 0, & u > \dfrac{3}{2}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $u = R_0 / \overline{R_0}$, R_0 и $\overline{R_0}$ – радиус КТ и его среднее значение соответственно; e – основание натурального логарифма.

Тогда, коэффициенты примесного поглощения света продольной $\alpha_B^{(s)}(\omega)$ и поперечной к направлению магнитного поля поляризации с учетом дисперсии размеров КТ будут определяться выражениями

$$\alpha_B^{(s)}(\omega)=\frac{2\pi N_0}{\hbar I_0}\sum_n \delta_{|m|,0}\int_0^{\frac{3}{2}} du\, P(u)\left|M^{(s)}\right|^2 \delta\left(E_{n,0,1}+|E_1|+|E_2|-\hbar\omega\right), \quad (2)$$

$$\alpha_B^{(t)}(\omega)=\frac{2\pi N_0}{\hbar I_0}\sum_{n_1,n}\sum_{m=-1}^{1}\delta_{|m|,1}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{3}{2}} du\, P(u)\left|M^{(t)}\right|^2 \delta\left(E_{n,l,1}+|E_1|+|E_2|-\hbar\omega\right), \quad (3)$$

где N_0 – концентрация КТ в диэлектрической матрице; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. $\delta_{|m|,0}$ и $\delta_{|m|,1}$ – символ Кронекера, учитывающий правило отбора для магнитного квантового числа *m*.

Правила отбора для магнитного квантового числа m таковы, что в случае , $\vec{e}_\lambda \nearrow\nearrow \vec{B}$ ($\vec{e}_\lambda$ – вектор поляризации света; $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции) оптические переходы с примесного уровня возможны только в состояния КТ со значением $m=0$, а в случае $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ $m=\pm 1$.

На рис. 1 представлены спектральные зависимости коэффициентов поглощения света, связанного с двойной фотоионизацией ДПЦ во внешнем магнитном поле. Можно видеть, что в случае $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ (кривая 2) происходит смещение порога примесного поглощения света в коротковолновую область спектра из-за роста энергии основного состояния ДПЦ. При этом на кривой поглощения кроме основного «двугорбого» профиля появляются дополнительные пики (дублет Зеемана).

На этом же рисунке приведена динамика полосы примесного поглощения с увеличением индукции магнитного поля *B* в случае $\vec{e}_\lambda \parallel \vec{B}$ (ср. кривые 1 и 3): порог поглощения сдвигается в длинноволновую область спектра, при этом наблюдается уменьшение величины коэффициента поглощения и исчезает правый пик на спектральной кривой, что связано с эффектом подавления электронных корреляций в магнитном поле.

Таким образом, в спектрах двойной фотоионизации ДПЦ в магнитном поле наблюдается дихроизм оптического поглощения, связанный с изменением правил отбора для магнитного квантового числа m: $m=0$ в случае $\vec{e}_\lambda \parallel \vec{B}$ и $m=\pm 1$ в случае $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$.

Коэффициент примесного поглощения $\alpha_E(\omega)$ света в условиях внешнего электрического поля с учетом дисперсии размеров КТ определяется выражением

$$\alpha_E(\omega)=\frac{2\pi N_0}{\hbar I_0}\sum_n\int_0^{\frac{3}{2}}duP(u)\left|M^{(E)}\right|^2\delta\left(E_{n,0,0}+|E_1|+|E_2|-\hbar\omega\right), \qquad (4)$$

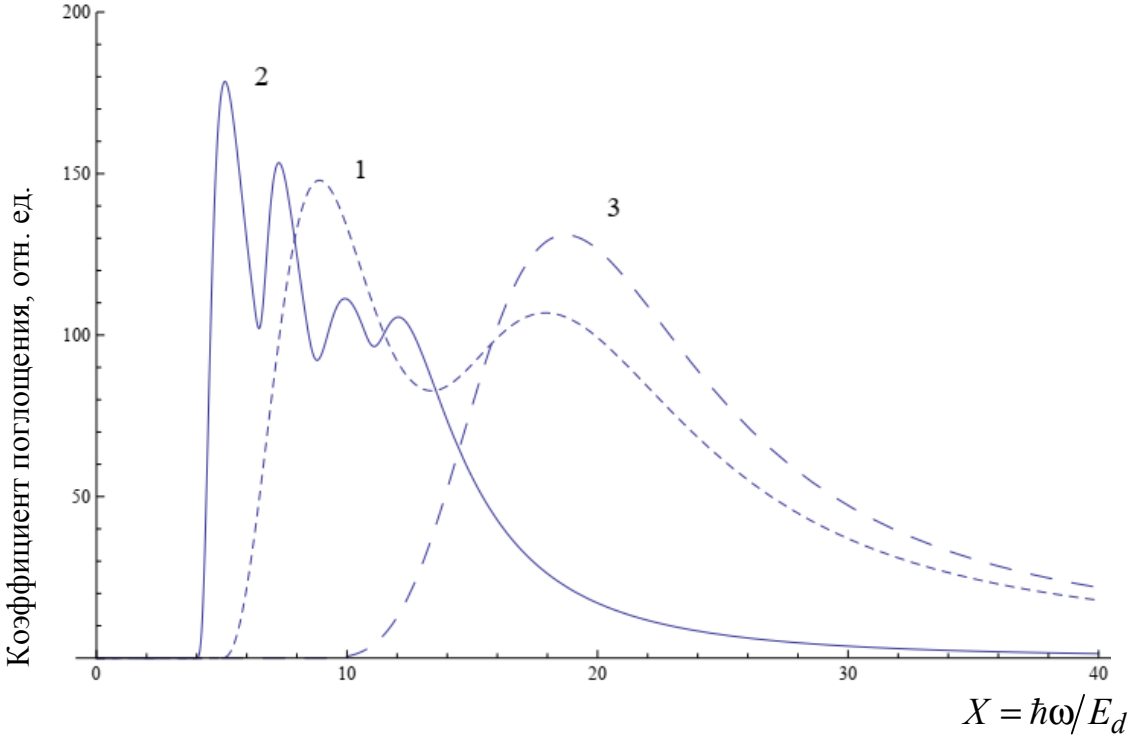


Рис. 1. Спектральная зависимость коэффициентов поглощения света при двойной фотоионизации двухэлектронных примесных центров в квазинульмерной структуре при $E_2=0{,}03$ эВ; $\bar{R}_0^*=1$, для различных направлений поляризации света относительно внешнего магнитного поля *B*: кривые: *1* – $B=0$; *2* – $B=2$ Тл ($\vec{e}_\lambda\perp\vec{B}$); *3* – $B=2$ Тл ($\vec{e}_\lambda\parallel\vec{B}$)

После выполнения интегрирования в (4) коэффициент примесного поглощения света $\alpha^{(E)}(\omega)$ запишется в виде

$$\alpha_E(X)=\alpha_0\sum_{n=1}^{N}\frac{P(u_n)}{X}\left[\left(\frac{\tilde{X}_{n,0}^2}{\bar{R}_0^{*2}u_n^2}+\frac{V_{n,0,0;n,0,0}}{E_d}+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{n'l'm'}\frac{\bar{R}_0^{*2}u_n^2\left|V_{n,0,0;n',l',m'}\right|^2}{\left(\pi^2-\tilde{X}_{n',l'}^2\right)E_d}-\frac{E_1}{E_d}\right)F\left(\bar{R}_0^*,u_n,\eta\right)\times$$

$$\left.+\left(\frac{\tilde{X}_{n,0}^2}{\bar{R}_0^{*2}u_n^2}+\frac{V_{n,0,0;n,0,0}}{E_d}+\sum_{n'l'm'}\frac{\bar{R}_0^{*2}u_n^2\left|V_{n,0,0;n',l',m'}\right|^2}{\left(\pi^2-\tilde{X}_{n',l'}^2\right)E_d}-\frac{E_2}{E_d}\right)F\left(\bar{R}_0^*,u_n,\eta\right)\right]^2, \qquad (5)$$

где

$$X = \hbar\omega / E_d \ ; \alpha_0 = \lambda_0^2 \alpha^* 2^{10} \pi I_0 \hbar \eta^{-6} E_d a_d^{11};$$

$$u_n = \left[2\left(X - \left(\left|E_1\right| + \left|E_2\right| + V_{n,0,0;n,0,0} \right) / E_d \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \left| V_{n,0,0;n',l',m'} \right|^2 \Big/ E_d \left(\tilde{X}_{n',l'}^2 - \pi^2 \right) + \right.$$

$$+ \left[\left(\bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \left| V_{n,0,0;n',l',m'} \right|^2 \Big/ E_d \left(\tilde{X}_{n',l'}^2 - \pi^2 \right) \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left. + 4\left(X - \left|E_1\right| - \left|E_2\right| - V_{n,0,0;n,0,0} \right) 2\tilde{X}_{n,0}^2 \Big/ E_d \bar{R}_0^{*2} \right]^{1/2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$F\left(\bar{R}_0^*, u_n, \eta \right) = \bar{R}_0^{*-1} u_n^{-1} sh^{-3}\left(\bar{R}_0^* u_n \eta^{-1} \right) \times$$

$$\times \left(th\left(\bar{R}_0^* u_n \eta^{-1} \right) - \bar{R}_0^* u_n \eta^{-1} \cos ec\left(\bar{R}_0^* u_n \eta^{-1} \right) \right)^{-3} \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\tilde{X}_{n,0}}{\bar{R}_0^* u_n} \right)^{-\frac{5}{2}} \frac{\left(\eta^2 sh\left(\bar{R}_0^* u_n \eta^{-1} \right) - \bar{R}_0^* u_n \eta \right)}{J_{\frac{3}{2}}\left(\tilde{X}_{n,0} \right)} \left[\left(\frac{\tilde{X}_{n,0}}{\bar{R}_0^* u_n} \right)^2 + 4\eta^{-2} \right]^{-2} \times \right.$$

$$\times \left[8\eta^{-2} \left(\left(\frac{\tilde{X}_{n,0}}{\bar{R}_0^* u_n} \right)^2 + 2\eta^{-2} \right) \cos\left(\tilde{X}_{n,0} \right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{\tilde{X}_{n,0}}{\bar{R}_0^* u_n} \right)^4 ch\left(2R_0^* u_n \eta^{-1} \right) - \left(\left(\frac{\tilde{X}_{n,0}}{\bar{R}_0^* u_n} \right)^2 + 4\eta^{-2} \right) \times$$

$$\left. \left. \times \left(\left(\frac{\tilde{X}_{n,0}}{\bar{R}_0^* u_n} \right)^2 + 4\eta^{-2} - 2\tilde{X}_{n,0} \eta^{-2} \sin\left(\tilde{X}_{n,0} \right) \right) \right] + \sum_{n'l'm'} \frac{\bar{R}_0^{*2} u_n^2 V_{n,0,0;n',l',m'}}{\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{\tilde{X}_{n',0}}{\bar{R}_0^* u_n} \right)^{-\frac{5}{2}} \frac{\left(\eta^2 sh\left(R_0^* u_n \eta^{-1} \right) - \bar{R}_0^* u_n \eta \right)}{J_{\frac{3}{2}}\left(\tilde{X}_{n',0} \right)} \left[\left(\frac{\tilde{X}_{n',0}}{\bar{R}_0^* u_n} \right)^2 + 4\eta^{-2} \right]^{-2} \times$$

$$\times\left[8\eta^{-2}\left(\left(\frac{\tilde{X}_{n',0}}{\overline{R}_0^* u_n}\right)^2+2\eta^{-2}\right)\cos\left(\tilde{X}_{n',0}\right)+\left(\frac{\tilde{X}_{n',0}}{\overline{R}_0^* u_n}\right)^4 ch\left(2\overline{R}_0^* u_n\eta^{-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\left(\frac{\tilde{X}_{n',0}}{\overline{R}_0^* u_n}\right)^2+4\eta^{-2}\right)\left(\left(\frac{\tilde{X}_{n',0}}{\overline{R}_0^* u_n}\right)^2+4\eta^{-2}-2\tilde{X}_{n',0}\eta^{-2}\sin\left(\tilde{X}_{n',0}\right)\right)\right]\Bigg\}.$$

На рис. 2 представлены спектральные зависимости коэффициента поглощения света при двойной фотоионизации двухэлектронных примесных центров во внешнем электрическом поле. Можно видеть, что усиление электронных корреляций (см. кривую 2 на рис.2) сопровождается штарковским сдвигом и увеличением провала между пиками на спектральной кривой.

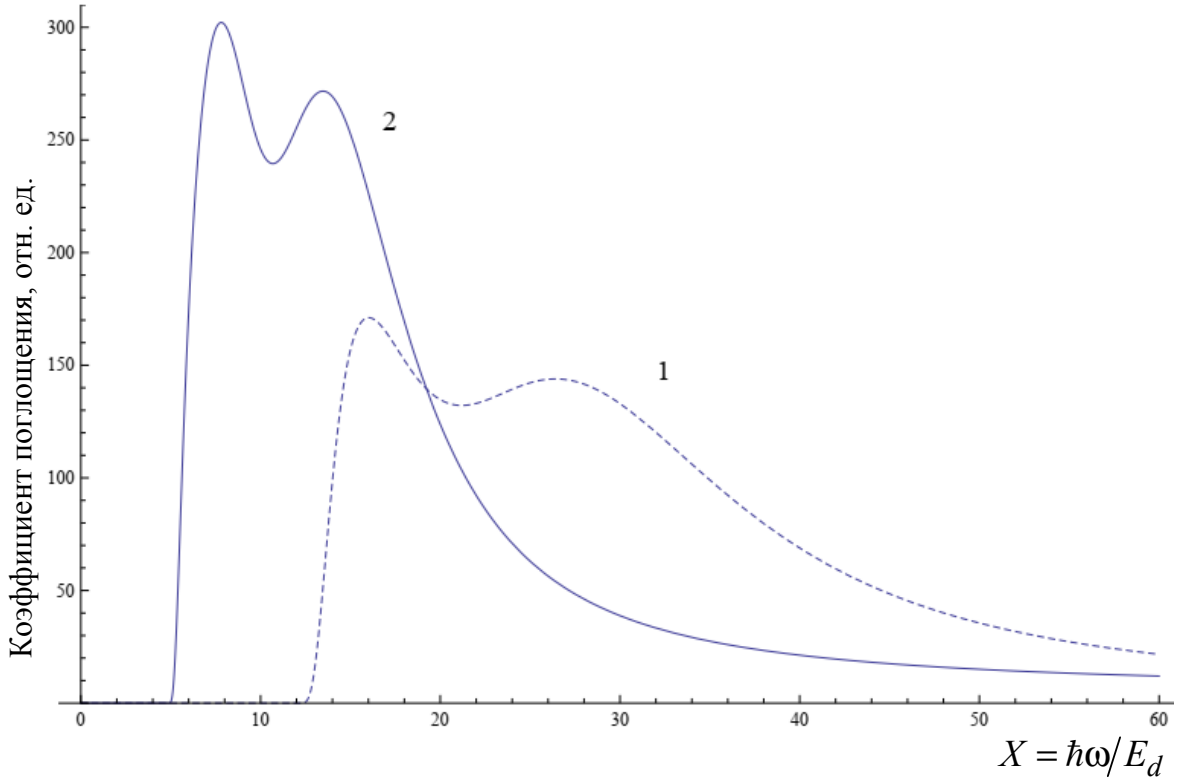


Рис. 2. Спектральная зависимость коэффициентов поглощения света при двойной фотоионизации двухэлектронных примесных центров в квазинульмерной структуре при $E_2=0{,}04$ эВ; $\overline{R}_0^*=1$, для разных значений напряженности внешнего электрического поля E_0, В/м, кривые: *1* – $E_0=0$; *2* - $E_0=10^4$

Заключение

В работе вариационным методом в рамках теории возмущений проведено теоретическое исследование влияния магнитного и электри-

ческого поля на спектры двойной фотоионизации ДПЦ в квазинульмерной структуре.

В дипольном приближении в рамках метода эффективной массы рассчитаны коэффициенты примесного поглощения света при двойной ионизации ДПЦ одним фотоном во внешнем магнитном поле. Показано, что имеет место дихроизм оптического поглощения света, связанный с изменением правил отбора для магнитного квантового числа. В случае $\vec{e}_\lambda \parallel \vec{B}$ влияние магнитного поля проявляется в увеличении порогового значения энергии фотона и исчезновении правого пика на спектральной кривой вследствие подавления электронных корреляций в магнитном поле. Характерной особенностью спектра двойной фотоионизации в случае $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ является двойной дублет Зеемана: на основных «горбах» кривой поглощения появляются четыре дополнительных пика, при этом край полосы примесного поглощения света смещается в длинноволновую область спектра.

Исследована спектральная зависимость коэффициента поглощения и его зависимость от напряженности внешнего электрического поля. Показано, что квантово-размерный эффект Штарка проявляется в спектре поглощения квазинульмерной структуры в «красном» смещении энергии оптического перехода. Выявлено, что во внешнем электрическом поле появляются дополнительные степени свободы для управления электронными корреляциями в спектрах двойной фотоионизации квазинульмерных структур.

Библиографический список

1. Кревчик, В.Д. Примесное поглощение света в структурах с квантовыми точками/ В. Д. Кревчик, Р. В. Зайцев // Физика твердого тела. – 2001. – Т. 43, № 3. – С. 504–507.

2. Галиев, В. И. Спектры энергии и оптического поглощения мелких примесей в полупроводниковой квантовой точке / В. И. Галиев, А. Ф. Полупанов // Физика и техника полупроводников. – 1993. – Т. 27, № 7. – С. 1202–1210**.**

3. Гринберг, А. А. Об энергетическом спектре многозарядных примесных центров в полупроводниках / А. А. Гринберг, Е. Д. Белорусец // Физика твердого тела. – 1978. – С. 1970–1978.

4. Кревчик, В. Д. Двойная фотоионизация двухэлектронных примесных центров в квазинульмерных структурах / В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, П. С. Будянский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3. – С. 289–240.

5. Лифшиц, И. М. О кинетике диффузионного распада пересыщенных твердых растворов / И. М. Лифшиц, В. В. Слезов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1958. – Т. 35, № 2 (8). – С. 479–492.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ КРУГЛЫХ ЧАСТИЦ НА ПЛОСКОСТИ

Т. В. Меньшакова, А. О. Сыромясов

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва,
г. Саранск, Россия
E-mail: menshakova_94@mail.ru; syal1@yandex.ru

Изучение данной темы началось достаточно давно. В книге [1] описывается поведение одной круглой частицы в температурном поле с постоянным градиентом. Далее в [2] была решена задача о двух сферических частицах с произвольным радиусом, помещенных в сплошную среду с постоянным градиентом температуры; в этой же статье были найдены скалярные параметры тензорных коэффициентов мультипольного представления температуры в пространстве. Мы же хотим найти распределение температуры возле и внутри двух круглых частиц на плоскости.

Пусть у нас имеются две неподвижные частицы с одинаковым радиусом a и теплопроводностью κ_p, помещенные в жидкость с теплопроводностью κ_f. Центры частиц находятся на расстоянии r друг от друга (рис. 1). Чтобы частицы не перекрывались, необходимо, чтобы выполнялось условие $r > 2a$.

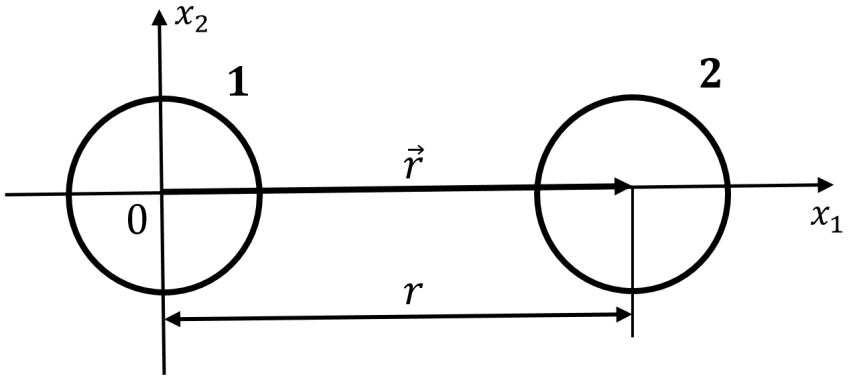


Рис. 1

Обозначим температуру возле частиц через функцию T_f, а внутри каждой частицы – через функцию $T_p(N)$, где N – номер частицы.

Из уравнения теплопроводности в стационарном случае (оно же уравнение Лапласа) имеем:

$$\Delta T_f = 0 \text{ (вне частиц)}; \ \Delta T_p(N) = 0 \text{ (внутри } N\text{-ой частицы)}. \qquad (1)$$

Также необходимо учесть граничные условия. Далеко от частиц возмущения, вызванные присутствием частиц, затухают, а градиент температуры $\vec{T} = (T_1, T_2)$ постоянен

$$T_f \to T_0 + T_j x_j, |\vec{x}| \to \infty, \tag{2}$$

где повторение индекса j означает сумму от 1 до 2.

В центрах частиц выполнены условия:

$$T_p(1) = T_0, \; T_p(2) = T_0 + T_1 r, \tag{3}$$

т.е. температура соответствует невозмущенному полю (2).

На границах частиц температура непрерывна:

$$T_f = T_p(1) \, при \, |\vec{x}| = a, \; T_f = T_p(2) \, при \, |\vec{x} - \vec{r}| = a; \tag{4}$$

непрерывен и тепловой поток:

$$\kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_p \frac{\partial T_p(1)}{\partial n} при \, |\vec{x}| = a,$$

$$\kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_p \frac{\partial T_p(2)}{\partial n} при \, |\vec{x} - \vec{r}| = a. \tag{5}$$

Решение полученной системы (1)-(5) будем искать с помощью метода мультипольного разложения. В связи с тем, что уравнение Лапласа (1) – линейно, то сумма его решений также является решением и произведение решения на постоянную – тоже решение. Так как оно вдобавок имеет постоянные коэффициенты, то частные производные от его решения – тоже решение. Поэтому появляется идея сконструировать новое решение, взяв частные производные от фундаментального решения уравнения Лапласа (при этом вектор $\vec{T}$ должен войти в это решение в первой степени).

В [2] использовано фундаментальное решение в пространстве

$$\frac{1}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

мы же рассмотрим его на плоскости $\ln|\vec{x}| = \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Основная сложность здесь заключается в том, что натуральный логарифм на бесконечности не стремится к нулю, а неограниченно возрастает.

В итоге распределение температуры вне частиц будем искать в виде:

$$T_f = T_0 + T_j x_j + A_0^{ext}(1) L_0(\vec{x}) + H_j^{ext}(1) L_j(\vec{x}) + F_{jk}^{ext}(1) L_{jk}(\vec{x}) +$$

$$+G^{ext}_{jkl}(1)L_{jkl}(\vec{x})+\ldots+A^{ext}_{0}(2)L_{0}(\vec{x}-\vec{r})+H^{ext}_{j}(2)L_{j}(\vec{x}-\vec{r})+$$

$$+F^{ext}_{jk}(2)L_{jk}(\vec{x}-\vec{r})+G^{ext}_{jkl}(2)L_{jkl}(\vec{x}-\vec{r})+\ldots,$$

где мультиполи выглядят следующим образом:

$$L_{0}(\vec{x})=\ln|\vec{x}|, L_{i\ldots j}(\vec{x})=\frac{\partial}{\partial x_i}\ldots\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\ln|\vec{x}|\right).$$

Аналогично, внутри каждой частицы имеем:

$$T_p(1)=T_0+A^{int}_{0}(1)L_{0}(\vec{x})+H^{int}_{j}(1)L_{j}(\vec{x})|\vec{x}|^2+F^{int}_{jk}(1)L_{jk}(\vec{x})|\vec{x}|^4+$$

$$+G^{int}_{jkl}(1)L_{jkl}(\vec{x})|\vec{x}|^6+\ldots,$$

$$T_p(2)=T_0+T_1 r+A^{int}_{0}(2)L_{0}(\vec{x}-\vec{r})+H^{int}_{j}(2)L_{j}(\vec{x}-\vec{r})|\vec{x}-\vec{r}|^2+$$

$$+F^{int}_{jk}(2)L_{jk}(\vec{x}-\vec{r})|\vec{x}-\vec{r}|^4+G^{int}_{jkl}(2)L_{jkl}(\vec{x}-\vec{r})|\vec{x}-\vec{r}|^6+\ldots,$$

где $A^{ext}_{0}(1),\ldots,G^{int}_{jkl}(2),\ldots$ – тензорные коэффициенты.

Ограничимся тензорными коэффициентами не выше второго ранга, т.е. G_{jkl} не рассматриваем. Так как распределение температуры должно быть линейно по $\vec{T}$, то в каждый тензорный коэффициент должны обязательно войти T_j и только в 1-ой степени. Кроме того, тензоры не должны в себя включать символ Кронекера, т.к. его свертка с мультиполями равна нулю.

Приняв во внимание вышесказанное, получаем:

$$T_f=T_0+T_1x_1+T_2x_2+AA^{ext}(1)L_{0}(\vec{x})T_1+HA^{ext}(1)L_{1}(\vec{x})T_1+$$

$$+HB^{ext}(1)L_{2}(\vec{x})T_2+FA^{ext}(1)L_{11}(\vec{x})T_1+2FB^{ext}(1)L_{12}(\vec{x})T_2+$$

$$+AA^{ext}(2)L_{0}(\vec{x}-\vec{r})T_1+HA^{ext}(2)L_{1}(\vec{x}-\vec{r})T_1+HB^{ext}(2)L_{2}(\vec{x}-\vec{r})T_2+$$

$$+FA^{ext}(2)L_{11}(\vec{x}-\vec{r})T_1+2FB^{ext}(2)L_{12}(\vec{x}-\vec{r})T_2,$$

$$T_p(1)=T_0+AA^{int}(1)T_1+HA^{int}(1)L_{1}(\vec{x})|\vec{x}|^2T_1+HB^{int}(1)L_{2}(\vec{x})|\vec{x}|^2T_2+$$

$$+FA^{int}(1)L_{11}(\vec{x})|\vec{x}|^4T_1+2FB^{int}(1)L_{12}(\vec{x})|\vec{x}|^4T_2,$$

$$T_p(2)=T_0+T_1r+AA^{int}(2)T_1+HA^{int}(2)L_{1}(\vec{x}-\vec{r})|\vec{x}-\vec{r}|^2T_1+$$

$$+HB^{int}(2)L_{2}(\vec{x}-\vec{r})|\vec{x}-\vec{r}|^2T_2+FA^{int}(2)L_{11}(\vec{x}-\vec{r})|\vec{x}-\vec{r}|^4T_1+$$

$$+2FB^{int}(2)L_{12}(\vec{x}-\vec{r})|\vec{x}-\vec{r}|^4 T_2. \qquad (6)$$

Значения $AA^{ext}(1),\ldots,FB^{int}(2),\ldots$ были найдены как разложение по степеням $\epsilon = a/r$. Для этого выражения (6) были подставлены в граничные условия (4)-(5). В итоге было получено, что

$$AA^{ext}(N)=0, AA^{int}(1)=-\frac{a(\kappa_f-\kappa_p)\epsilon}{\kappa_f+\kappa_p}, AA^{int}(2)=\frac{a(\kappa_f-\kappa_p)\epsilon}{\kappa_f+\kappa_p},$$

$$HA^{ext}(N)=\frac{a^2(\kappa_f-\kappa_p)}{\kappa_f+\kappa_p}-\frac{a^2(\kappa_f-\kappa_p)^2\epsilon^2}{(\kappa_f+\kappa_p)^2},$$

$$HB^{ext}(N)=\frac{a^2(\kappa_f-\kappa_p)}{\kappa_f+\kappa_p}+\frac{a^2(\kappa_f-\kappa_p)^2\epsilon^2}{(\kappa_f+\kappa_p)^2},$$

$$HA^{int}(N)=\frac{2\kappa_f}{\kappa_f+\kappa_p}-\frac{2\kappa_f(\kappa_f-\kappa_p)\epsilon^2}{(\kappa_f+\kappa_p)^2},$$

$$HB^{int}(N)=\frac{2\kappa_f}{\kappa_f+\kappa_p}+\frac{2\kappa_f(\kappa_f-\kappa_p)\epsilon^2}{(\kappa_f+\kappa_p)^2},$$

$$FA^{ext}(N)=FB^{ext}(N)=0, FA^{int}(N)=FB^{int}(N)=0.$$

Для наглядности изобразим распределение температуры с помощью пакета Wolfram Mathematica. При $a=1,\ \epsilon=0.2,\ \kappa_f=1,\ \kappa_p=2,$ $T_0=0,\ T_1=0,\ T_2=1$ получаем (рис. 2).

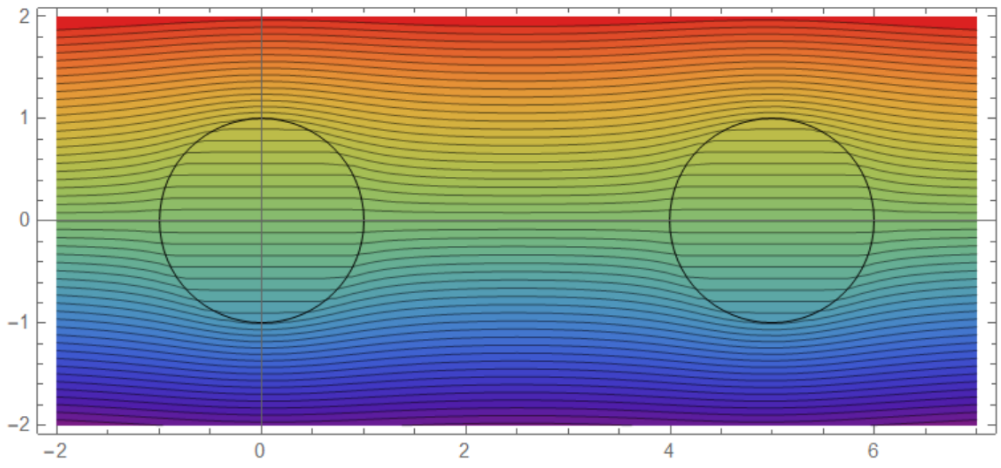


Рис. 2

Изменяя значение T_1 на 0.4 (рис. 3), а затем приняв $T_1 = 1$ и $T_2 = 0$ (рис. 4), мы видим, как искажается поле температуры, если градиент $\vec{T}$ направлен под разными углами к вектору $\vec{r}$.

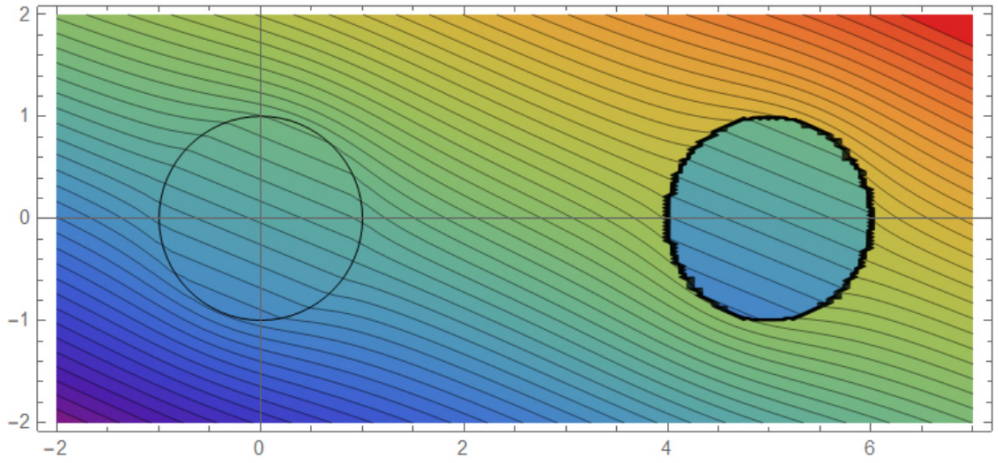


Рис. 3

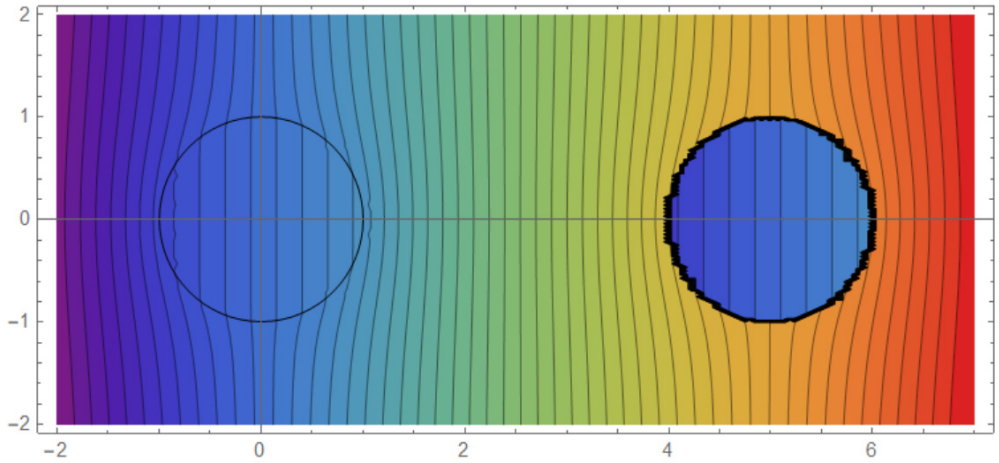


Рис. 4

Найденное решение можно уточнить, если учесть тензорные коэффициенты более высокого ранга и вести разложение по более высоким степеням ϵ.

Библиографический список

1. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. – Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 736 с.

2. Сыромясов, А. О. Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры / А. О. Сыромясов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (3). – С. 1158–1160.

РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОМЕРНОГО ШКАЛИРОВАНИЯ

К. О. Горбылева, Д. К. Егорова*

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва,
Саранск, Россия
E-mail: gorbylevaruz@yandex.ru; egorovadk@mail.ru

Введение

В работе рассмотрена реализация одной модели неметрического многомерного шкалирования. Первоначально подобные модели описаны Роджером Шепардом, который предположил, что в евклидовом пространстве малой размерности мера различия между объектами есть монотонная функция от расстояний $d_{ij} = f\left(\delta_{ij}\right) + \varepsilon_{ij}$. Позже Джозефом Краскалом был предложен общий алгоритм неметрического многомерного шкалирования, где за меру различия принимают величину $d_{ij} = \left(\sum_{r=1}^{R} \left| x_{ir} - x_{jr} \right|^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$. Наиболее часто применяется евклидова метрика (p = 2), но, в зависимости от поставленных задач, могут применяться и другие метрики, например, метрика города (block city), метрика доминирования (sup-метрика) и т.п. Алгоритм Джозефа Краскала решает задачу минимизации функции соответствия модели исходным данным. Такой подход позволил использовать ранговые данные в качестве исходных, что сделало эту модель анализа многомерных данных наиболее применимой в исследованиях, где данные измеряются на уровне порядка или ранга.

Постановка задачи и реализация алгоритма

Применим модель неметрического многомерного шкалирования для сравнительного анализа объектов. Сформулируем задачу: используя сведения о наличии трех компонент в веществе (1 – не содержит компоненту, 9 – содержится в большом количестве), применяемом в определенном технологическом процессе, построить график конфигурации стимулов в двумерном шкальном пространстве. Исходные данные приведены в табл. 1.

Шаг 1. Получение исходных ранговых данных, характеризующих степень различия изучаемых объектов. При составлении матрицы различий (табл. 2), использована евклидова метрика.

В табл. 3 приведены результаты ранжирования данных по степени сходства и различия рассматриваемых веществ (в порядке увеличения расстояний).

Таблица 1

Исходные данные

	Компонента 1	Компонента 2	Компонента 3
Вещество 1	6	7	8
Вещество 2	9	7	9
Вещество 3	8	2	9
Вещество 4	4	1	7
Вода	1	1	1

Таблица 2

Матрица различий

	Вещество 1	Вещество 2	Вещество 3	Вещество 4	Вода
Вещество 1	0	3,16	5,48	6,4	10,49
Вещество 2	3,16	0	5,1	8,06	10,81
Вещество 3	5,48	5,1	0	4,58	10,68
Вещество 4	6,4	8,06	4,58	0	6,71
Вода	10,49	12,81	10,68	6,71	0

Таблица 3

Ранги

	Вещество 1	Вещество 2	Вещество 3	Вещество 4	Вода
Вещество 1	0	1	4	5	8
Вещество 2	1	0	3	7	10
Вещество 3	4	3	0	2	9
Вещество 4	5	7	2	0	6
Вода	8	10	9	6	0

Преобразуем данные о различиях веществ из ранговых в количественные характеристики [1]. На основе ранговых оценок строится корреляционная матрица, затем, используя парный коэффициент корреляции r_{ij}, получаем оценку различий по формуле $\delta_{ij} = (1 - r_{ij})^{1/2}$. Результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4

Количественные характеристики

	Вещество 1	Вещество 2	Вещество 3	Вещество 4	Вода
Вещество 1	0	0,22	0,729	1,114	1,356
Вещество 2	0,22	0	0,654	1,125	1,386
Вещество 3	0,729	0,654	0	0,643	1,356
Вещество 4	1,114	1,125	0,643	0	1,042
Вода	1,356	1,386	1,356	1,042	0

Шаг 2. Определение стартовой конфигурации. Стартовая конфигурация может быть найдена различными методами. В рассматриваемом примере по данным таблицы (табл. 4) оценки координат вычислены методом метрического шкалирования, например, рассмотренного в работе [2]. В результате получены нестандартизованные характеристики по двум координатным осям (табл. 5), позволяющие дать приблизительную оценку степени различия изучаемых объектов.

Таблица 5

Стартовая конфигурация для неметрического шкалирования

Стимул	Первая координатная ось, x_1	Вторая координатная ось, x_2
Вещество 1	-0,4594	0,2778
Вещество 2	-0,4966	0,2338
Вещество 3	-0,2557	-0,3666
Вещество 4	0,3287	-0,5117
Вода	0,8813	0,3611

Шаг 3. Стандартизация оценок. На данном этапе осуществляется стандартизация полученных на предыдущем шаге оценок координат и расстояний. Стандартизация необходима для решения двух проблем: 1) сохранение пропорциональности ортонормированного стимульного пространства; 2) исключение возможности появления вырожденных решений в результате сжатия пространства стимулов. Стандартизация осуществляется путем центрирования и нормирования данных. Расстояния между стимулами находят из стандартизованных координат. Вычисление элементов матрицы стандартизованных оценок расстояний, в рассматриваемом примере, осуществляется посредством евклидовой метрики (табл.6).

Шаг 4. Неметрический этап. Корректировка теоретических величин расстояний. На рисунке 1 приведен график, построенный на основе исходных и теоретических ранговых оценок.

Значения характеристик различий отложены по осям: фактические значения – по оси δ_{ij} , значения, принимаемые в теоретическом пространстве шкал X_1 X_2 – по оси $\widehat{\delta_{ij}}$. Прямая монотонной функции равномерно возрастающих оценок δ_{ij} обозначена на графике L_1. При построении линии L_2 учтены отклонения эмпирических ранговых оценок от теоретических. В скобках указаны порядковые номера исследуемых веществ.

При анализе графика обнаружили отсутствие монотонной зависимости исходных данных относительно теоретического пространства шкал X_k . Следовательно, необходимо осуществить процедуру корректи-

ровки теоретических величин d_{ij} таким образом, чтобы была восстановлена общая тенденция к возрастанию в исходных данных о различиях, оценки координат стимулов должны остаться неизменными.

Таблица 6

Стандартизованные и нестандартизованные оценки

Нестандартизованные оценки							
координат, x_1 x_2			расстояний, d_{ij}				
В-во 1	-0,459	0,278	0	0,058	0,676	1,116	1,343
В-во 2	-0,497	0,234	0,058	0	0,647	1,112	1,384
В-во 3	-0,256	-0,367	0,676	0,647	0	0,602	1,350
В-во 4	0,329	-0,512	1,116	1,112	0,602	0	1,033
Вода	0,881	0,361	1,343	1,384	1,350	1,033	0
Стандартизованные оценки							
координат, x_1 x_2			расстояний, d_{ij}				
В-во 1	-0,865	0,769	0	0,140	1,817	2,634	2,537
В-во 2	-0,935	0,647	0,140	0	1,716	2,577	2,620
В-во 3	-0,481	-1,007	1,817	1,716	0	1,172	2,935
В-во 4	0,620	-1,407	2,634	2,577	1,172	0	2,621
Вода	1,662	0,998	2,537	2,620	2,935	2,621	0

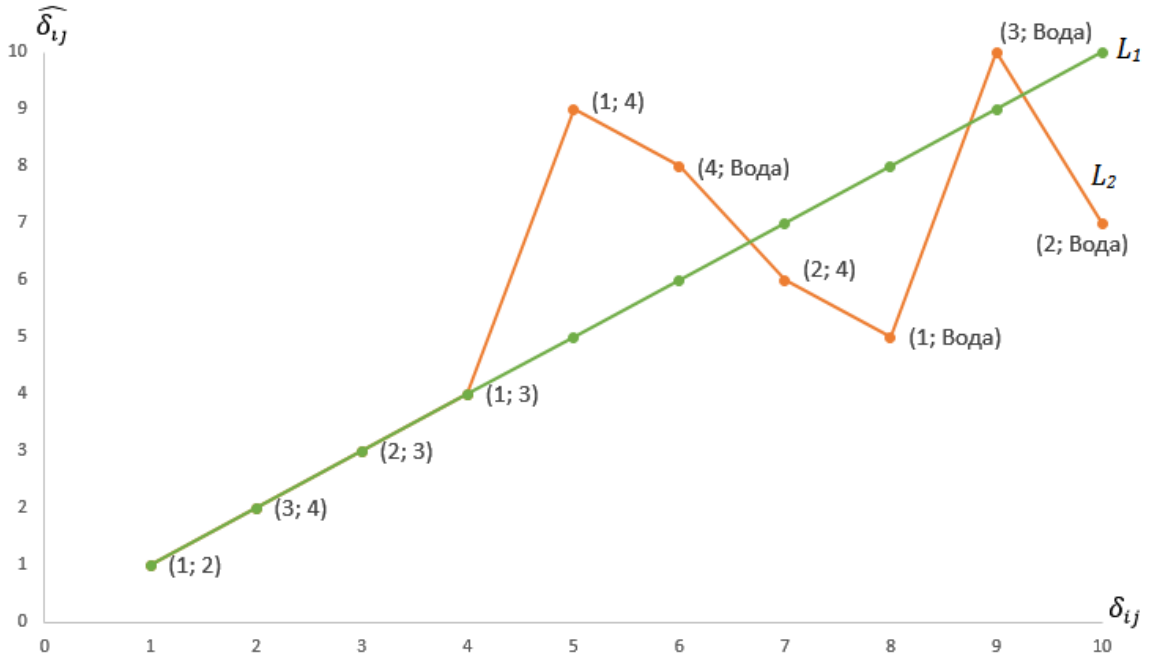


Рис. 1. Отношения ранговых порядков стимулов на первой итерации

Улучшение оценок расстояний осуществляется следующим образом: центрирование тех величин расстояний d_{ij}, которые отклоняются от прямой L_1, позволяет воспроизвести монотонность равномерно возрастающих теоретических данных. Для этого необходимо рассчитать средние арифметические отклоняющихся величин:

$$d_{(1,4)} = d_{(4,Вода)} = d_{(2,4)} = d_{(1,Вода)} = \frac{d_{(1,4)} + d_{(4,Вода)} + d_{(2,4)} + d_{(1,Вода)}}{4} =$$

$$= \frac{2,634 + 2,621 + 2,577 + 2,537}{4} = 2,592.$$

$$d_{(3,Вода)} = d_{(2,Вода)} = \frac{d_{(3,Вода)} + d_{(2,Вода)}}{2} = \frac{2,935 + 2,620}{2} = 2,778.$$

Исходные и уточненные (d_{ij}^{c} и d_{ij}^{c+1}) оценки различий веществ приведены в таблице 7. Неметрический этап завершен.

Таблица 7

Исходные ранговые оценки различий веществ и величины расстояний между ними в теоретическом пространстве шкал – исходные и уточненные

Исходный ранговый порядок δ_{ij}	Стимул	Стимул	Стандартизованные расстояния d_{ij}^{0}	Ранговый порядок стимулов в пространстве шкал X_1X_2 $\widehat{\delta_{ij}}$	Улучшенные оценки расстояний d_{ij}^{1}
1	Вещество 1	Вещество 2	0,140	1	0,140
2	Вещество 3	Вещество 4	1,172	2	1,172
3	Вещество 2	Вещество 3	1,716	3	1,716
4	Вещество 1	Вещество 3	1,817	4	1,817
5	Вещество 1	Вещество 4	2,634	9	2,592
6	Вещество 4	Вода	2,621	8	2,592
7	Вещество 2	Вещество 4	2,577	6	2,592
8	Вещество 1	Вода	2,537	5	2,592
9	Вещество 3	Вода	2,935	10	2,778
10	Вещество 2	Вода	2,620	7	2,778

Шаг 5. Метрический этап. На данном этапе, основываясь на имеющихся исходных и уточненных величинах расстояний, осуществляется уточнение оценок координат. Для этого применяем формулу Лингоса–Роскама $x_{ik}^{c+1} = x_{ik} - \frac{1}{j}\sum_{j}\left(1 - d_{ij}^{c+1} \Big/ d_{ij}^{c}\right)\left(x_{ik}^{c} - x_{jk}^{c}\right)$. В случае, когда $d_{ij} = 0$, отношение $d_{ij}^{c+1} / d_{ij}^{c}$ приравнивается единице. Вычисляем новые оценки X_1 координат для стимула «Вещество1» (исходные данные, участвующие в расчетах приведены в табл. 7 и 6):

$$x_{11}^{1} = x_{11}^{0} - \frac{1}{5}\sum_{1}^{5}\left(1 - d_{1j}^{1} \Big/ d_{1j}^{0}\right)\left(x_{11}^{0} - x_{j1}^{0}\right) = -1,360,$$

$$x_{12}^{1} = x_{12}^{0} - \frac{1}{5}\sum_{1}^{5}\left(1 - d_{1j}^{1} / d_{1j}^{0}\right)\left(x_{12}^{1} - x_{j2}^{0}\right) = 0{,}860.$$

Таким образом, вместо начальных координат стимула «Вещество1», соответственно равных $X_0 = (-1{,}351; 0{,}868)$, получили новые уточненные координаты $X_1 = (-1{,}360; 0{,}860)$. Аналогично рассчитаем новые координаты стимулов оставшихся веществ, после чего приступаем к нахождению расстояний между стимулами в теоретическом пространстве d^{c+1} с использованием новых оценок координат x_{ik}^{c+1}. Первую итерацию на этом принято считать завершенной. По полученным уточнённым координатам строим график конфигурации стимулов в двумерном шкальном пространстве (рис. 2).

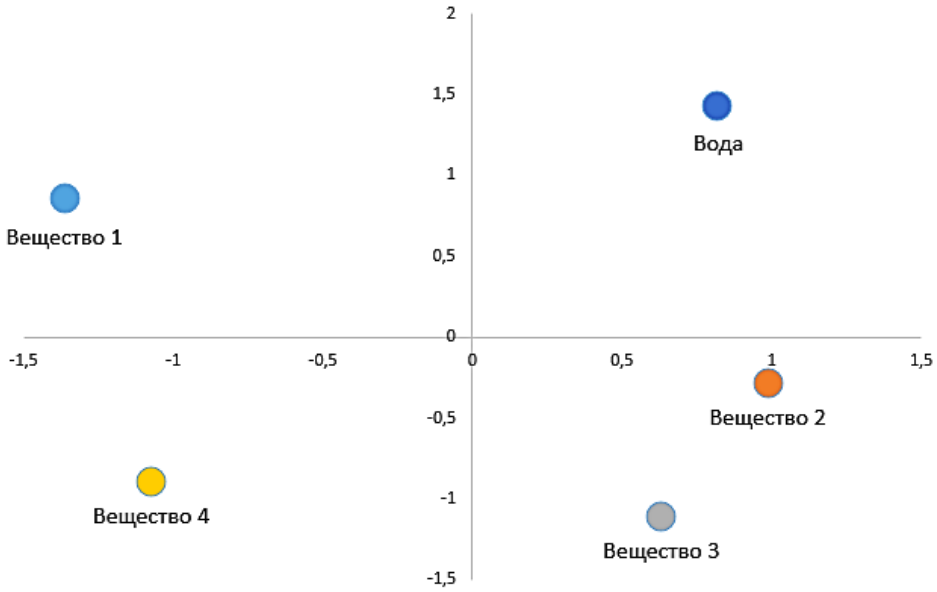


Рис. 2. График конфигурации стимулов в двумерном шкальном пространстве

Шаг 6. Оценка соответствия ранговых эмпирических данных теоретическим. Оценить степень соответствия теоретических и эмпирических данных возможно посредством применения стресс-формул Краскала:

$$S_1 = \left(\frac{\sum_{ij}\left(d_{ij} - \widehat{d_{ij}}\right)^2}{\sum_{ij} d_{ij}^2}\right)^{1/2}, \; S_2 = \left(\frac{\sum_{ij}\left(d_{ij} - \widehat{d_{ij}}\right)^2}{\sum_{ij}\left(\widehat{d_{ij}} - \widehat{d_*}\right)^2}\right)^{1/2},$$

где d и $\hat{d}$ – исходные и уточненные расстояния на некоторой итерации алгоритма соответственно; $\hat{d}_* = \frac{1}{ij}\sum_{ij} d_{ij}$ – среднее арифметическое всех оцениваемых расстояний.

Содержательная оценка величин, вычисленных согласно стресс-формулам, осуществляется по ранее известным стандартным характеристикам [3]. Полученные оценки $S_1 = 0,0332$, $S_2 = 0,0900$ дают основание судить о результатах решения как «отличное».

В случае если результат «улучшения» теоретических оценок расстояний не удовлетворяет исследователя, то после стандартизации новых оценок координат и расстояний начнется следующая итерация. Итерационный процесс будет продолжаться до тех пор, пока модуль разности величин стресса, вычисленных на двух последовательных итерациях, не станет меньше какого-либо наперед заданного числа.

Библиографический список

1. Дэйвисон, М. Многомерное шкалирование: Методы наглядного представления данных / М. Дэйвисон ; пер. с англ. В. С. Каменского. – Москва : Финансы и статистика, 1988. – 254 с.

2. Прикладная статистика: классификация и снижение размерности / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков и др. ; под ред. С. А. Айвазяна. – Москва : Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

3. Сошникова, Л. А. Многомерный статистический анализ в экономике : учеб. пособие для вузов / Л. А. Сошникова, В. Н. Тямяшевич, Г. Уебе, М. Шефер ; под ред. В. Н. Тамашевича. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 1999. – 598 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КАРДАРА – ПАРИЗИ – ЦВАНГА ДЛЯ СЛАБОФРАКТАЛЬНОГО НАЧАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ [1]

А. Э. Рассадин

Лаборатория бесконечномерного анализа
и математической физики
механико-математического факультета,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: brat_ras@list.ru

В настоящее время одной из самых популярных феноменологических моделей эпитаксиального роста поверхности твёрдого тела является уравнение Кардара – Паризи – Цванга (см. [1] и ссылки там).

В данном докладе будем рассматривать ситуацию, когда начальный профиль исследуемой поверхности обладает цилиндрической обра-

[1] Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант № 18-08-01356-а.

зующей. В этом случае для уравнения Кардара – Паризи – Цванга можно поставить следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = c + \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \nu \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2},\ H(x,0) = H_0(x),\ x \in R, \qquad (1)$$

где $H(x,t)$ – высота поверхности в момент времени $t > 0$, c – скорость роста поверхности по локальной нормали к ней и ν – коэффициент поверхностной диффузии напыляемого на поверхность вещества.

Далее, пусть начальное условие имеет вид:

$$H_0(x) = h_0(x) + \mu \cdot u_0(x), \qquad (2)$$

где μ – малый параметр: $0 < \mu << 1$, тогда решение уравнения (1) целесообразно искать в рамках теории возмущений:

$$H(x,t) = h(x,t) + \mu \cdot u(x,t) + \ldots . \qquad (3)$$

Подставляя асимптотический ряд (3) в уравнение (1), получим серию задач Коши на прямой, а именно, в нулевом порядке по μ:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c + \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \nu \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},\ h(x,0) = h_0(x), \qquad (4)$$

в первом порядке по μ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = u_0(x), \qquad (5)$$

где переменный коэффициент в уравнении (5) связан с решением $h(x,t)$ задачи Коши (4) следующим образом:

$$v(x,t) = -c \cdot \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}. \qquad (6)$$

Таким образом, зная решения задач Коши (4) и (5), по формуле (3) можно определить временную эволюцию высоты поверхности твёрдого тела с точностью до членов порядка μ.

С другой стороны, хорошо известно [1], что введением новой неизвестной функции $\Phi(x,t)$ с помощью так называемой подстановки Коула-Хопфа:

$$H(x,t) = c \cdot t + \frac{2 \cdot \nu}{c} \cdot \ln \Phi(x,t) \qquad (7)$$

исходное уравнение (1) линеаризуется:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \qquad (8)$$

однако при этом начальное условие к уравнению (8) выражается через начальное условие (2) к уравнению (1) нелинейным образом:

$$\Phi_0(x) = \exp\left[\frac{c \cdot h_0(x)}{2 \cdot \nu}\right] \cdot \exp\left[\mu \cdot \frac{c \cdot u_0(x)}{2 \cdot \nu}\right]. \qquad (9)$$

Точное решение линейного параболического уравнения (8) имеет вид [2]:

$$\Phi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi,t) \cdot \Phi_0(\xi) \cdot d\xi, \qquad (10)$$

где

$$G(x,t) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \nu \cdot t}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{4 \cdot \nu \cdot t}\right] \qquad (11)$$

– функция Грина уравнения (8) [2].

Раскладывая функцию (9) в ряд Тейлора по степеням малого параметра μ и подставляя это разложение в интеграл (10), получим, что:

$$\Phi(x,t) = \phi(x,t) + \mu \cdot \frac{c}{2 \cdot \nu} \cdot \psi(x,t) + \ldots, \qquad (12)$$

где

$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi,t) \cdot \exp\left[\frac{c \cdot h_0(\xi)}{2 \cdot \nu}\right] \cdot d\xi \qquad (13)$$

и

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi,t) \cdot u_0(\xi) \cdot \exp\left[\frac{c \cdot h_0(\xi)}{2 \cdot \nu}\right] \cdot d\xi. \qquad (14)$$

Подставим ряд (12) в формулу (7) и разложим логарифм, входящий в неё, с точностью до членов первого порядка по μ включительно, тогда:

$$H(x,t) = c \cdot t + \frac{2 \cdot \nu}{c} \cdot \ln \phi(x,t) + \mu \cdot \frac{\psi(x,t)}{\phi(x,t)} + \ldots . \qquad (15)$$

Сравнивая формулу (15) с рядом (3), найдём, что:

$$h(x,t) = c \cdot t + \frac{2 \cdot \nu}{c} \cdot \ln \phi(x,t) \qquad (16)$$

и

$$u(x,t) = \frac{\psi(x,t)}{\phi(x,t)}. \qquad (17)$$

Поскольку очевидно, что функции (13) и (14) удовлетворяют уравнению (8), то тот факт, что их отношение (17) является точным решением уравнения (5), легко проверить и прямым вычислением.

Далее, хорошо известно [2], что для функции (11) $\lim\limits_{t\to 0+0} G(x,t)=\delta(x)$ (предел понимается в слабом смысле), поэтому из формул (13) и (14) следует, что

$$\phi(x,0)=\exp\left[\frac{c\cdot h_0(x)}{2\cdot\nu}\right] \text{ и } \psi(x,0)=u_0(x)\cdot\exp\left[\frac{c\cdot h_0(x)}{2\cdot\nu}\right].$$

Таким образом, функция (17) удовлетворяет и начальному условию $u(x,0)=u_0(x)$ для уравнения (5).

Проиллюстрируем развитую выше технику на конкретном примере.

Выберем начальный профиль при $\mu=0$, следуя [3]:

$$h_0(x)=\frac{2\cdot\nu}{c}\cdot\ln[1+m_0\cdot\cos(k_0\cdot x)], \tag{18}$$

где $0<m_0<1$, а $u_0(x)$ возьмём в виде:

$$u_0(x)=\sum_{n=1}^{N} a^n\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot b^n\cdot x}{L}\right). \tag{19}$$

Кроме того, пусть $0<a<1$ и $a\cdot b>1$, тогда функция Вейерштрасса:

$$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot b^n\cdot x}{L}\right), \tag{20}$$

нигде не дифференцируема [4], причём при всех $x\in R$

$$|u_0(x)-W(x)|\le\frac{a^{N+1}}{1-a},$$

то есть при больших N функция (19) равномерно приближает функцию (20).

Подставляя функции (18) и (19) в формулы (13) и (14), получим, что:

$$\phi(x,t)=1+m_0\cdot\exp(-\nu\cdot k_0^2\cdot t)\cdot\cos(k_0\cdot x) \tag{21}$$

и

$$\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{N} a^n\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2\cdot b^{2n}\cdot\nu\cdot t}{L^2}\right)\cdot\cos\frac{\pi\cdot b^n\cdot x}{L}+$$

$$+\frac{m_0}{2}\cdot\sum_{n=1}^{N}a^n\cdot\exp\left[-\nu\cdot t\cdot\left(k_0+\frac{\pi\cdot b^n}{L}\right)^2\right]\cdot\cos\left[\left(k_0+\frac{\pi\cdot b^n}{L}\right)\cdot x\right]+$$

$$+\frac{m_0}{2}\cdot\sum_{n=1}^{N}a^n\cdot\exp\left[-\nu\cdot t\cdot\left(k_0-\frac{\pi\cdot b^n}{L}\right)^2\right]\cdot\cos\left[\left(k_0-\frac{\pi\cdot b^n}{L}\right)\cdot x\right]. \qquad (22)$$

Для профиля (18) из формулы (16) в полном соответствии с результатами статьи [3] получим:

$$h(x,t)=c\cdot t+\frac{2\cdot\nu}{c}\cdot\ln[1+m_0\cdot\exp(-\nu\cdot k_0^2\cdot t)\cdot\cos(k_0\cdot x)]. \qquad (23)$$

Таким образом, следуя формуле (15), выражения (21)-(23) дают полное описание эволюции растущей поверхности твёрдого тела с точностью до членов первого порядка по μ включительно для начального профиля вида:

$$H_0(x)=\frac{2\cdot\nu}{c}\cdot\ln[1+m_0\cdot\cos(k_0\cdot x)]+\mu\cdot\sum_{n=1}^{N}a^n\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot b^n\cdot x}{L}\right). \qquad (24)$$

График типичного представителя семейства функций (24) приведён на рис. 1.

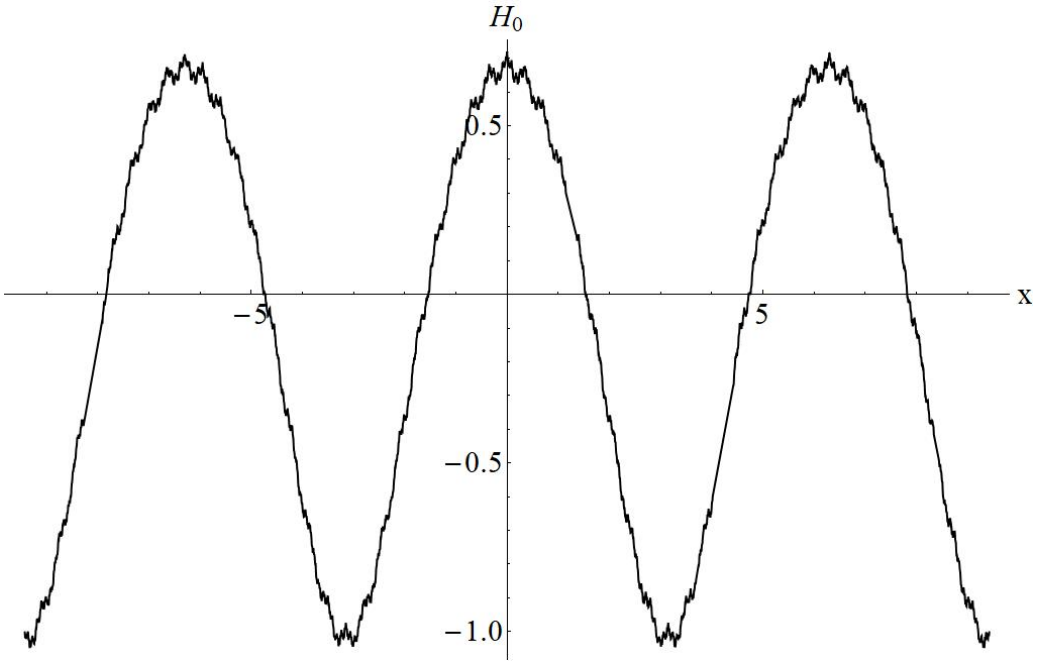


Рис. 1. Слабофрактальный профиль поверхности твёрдого тела с цилиндрической образующей

Хорошо известно, что функция Вейерштрасса (20) обладает фрактальными свойствами [5], значит, благодаря близости функции (19) к

функции Вейерштрасса построенное по выражениям (21)-(23) асимптотическое решение уравнения Кардара-Паризи-Цванга для начального условия (24) также имеет фрактальную структуру. Более того, в каждый момент времени $t \geq 0$ его фрактальная размерность может быть оценена.

В докладе для различных значений параметров начального условия (24) приведены графики асимптотических решений уравнения Кардара-Паризи-Цванга, соответствующие этому начальному условию, а также зависимости их фрактальных размерностей от времени.

В заключение отметим ещё ряд возможных приложений полученных в этой работе результатов.

Легко проверить, что если продифференцировать уравнение (4) по координате x, то для функции (6) получится следующее уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \qquad (25)$$

Это уравнение называется уравнением Бюргерса [6].

Если рассматривать уравнения (5) и (25) совместно, то есть как систему уравнений, то уравнение (5) можно интерпретировать как уравнение переноса средой с полем скорости $v(x,t)$, удовлетворяющим уравнению Бюргерса, примеси с концентрацией $u(x,t)$, причём формулы (13), (14), (16) и (17) дают точное решение этой системы. Если же рассматривать уравнение (5) отдельно, то эти точные решения позволяют протестировать различные разностные схемы для уравнения переноса примеси с учётом диффузии, что важно для целого ряда задач геофизической гидродинамики [7].

Библиографический список

1. Gubinelli, M. KPZ Reloaded / M. Gubinelli, N. Perkowski // Communications in Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 349, № 1. – P. 165–269.

2. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1966. – 724 с.

3. Рассадин, А. Э. Новое явное решение уравнения Кардара – Паризи – Цванга и его применения / А. Э. Рассадин, А. В. Степанов, Л. А. Фомин // Advanced science. – 2018. – № 1. – С. 28–33.

4. Hardy, G. H. Weierstrass's nondifferentiable function / G. H. Hardy // Trans. Amer. Math. Soc. – 1916. – Vol. 17. – P. 301–325.

5. Hunt, B. R. The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions / B. R. Hunt // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1998. – Vol. 126, № 3. – P. 791–800.

6. Burgers, J. M. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion / J. M. Burgers // Kon. Ned. Akad. Wet. Verh. – 1939. – Vol. 17. – P. 1–53.

7. Шатров, А. В. Численное моделирование атмосферных мезомасштабных процессов переноса примесей в окрестности города Кирова / А. В. Шатров, К. Г. Шварц // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 3. – С. 117–125.

ПРОБЛЕМЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ТЕХНОЛОГИЯХ

А. Ш. Шакиров, Р. К. Галимова*, З. Я. Якупов*

Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ,
г. Казань, Россия
E-mail: shaquir@yandex.ru; RKGalimova@kai.ru; zymat@bk.ru

Под термином «золь» понимается коллоидная дисперсия твердых частиц жидкости [1-2]. В настоящее время процессы, основанные на использовании золей, активно применяются в биотехнологиях. Выяснилось, что состояние золя присуще для «строительных материалов» живой природы. Например, в биологии под понятием «золь» и «коллоидные растворы» понимают большинство жидкостей живой клетки: ядерный сок, цитоплазма, кровь, лимфа, пищеварительные соки.

В золь-гель технологиях применяются растворы, называемые коллоидными или полуколлоидными. Золь-гель методы относят к «химическим» методам получения необходимого материала (они включают в себя стадии гидролиза и полимеризации). Продукты полимеризации, скорость реакции, эффекты pH или необходимость различных добавок в этих процессах могут быть определены экспериментально [2-4]. Однако фактические механизмы полимеризации не полностью выяснены [5].

Под понятием «золь-гель технология» понимают технологию получения неорганических и органо-неорганических материалов, таких как адсорбенты, мембраны, катализаторы, керамика и другие. Эта технология основана на переходе однородного раствора в золь и дальнейшем образовании геля из золя.

Коллоиды это суспензии, которые имеют небольшую дисперсную фазу, вследствие чего силами гравитации можно пренебречь. На первый план выходят такие силы, как, например, силы Ван-дер-Ваальса. Из-за достаточно малой инерции дисперсной фазы появляется броуновское движение частиц (случайные скачки, которые возбуждаются кинетической энергией, сообщаемой при столкновениях с молекулами дисперсионной среды). Для понимания природы золя становится необходимо уточнение, что частицы дисперсной фазы не молекулы, а агрегаты, состоящие из большого числа молекул.

Некоторые авторы подразделяют золи на коллоидные золи и полимерные золи.

Коллоидные золи состоят из макрочастиц, т.е. имеют твердую дисперсную фазу, образованную частицами. Полимерные золи имеют основу, состоящую из разветвленных макромолекул.

У коллоидных и полимерных золей механизм гелеобразования различен. В полимерных золях гель образуется в результате полимери-

зации и поликонденсации макромолекул раствора с участием ковалентных связей между ними. Это создает единую полимерную макроцепь. Формирование коллоидного геля иное. Частички дисперсной фазы (мицеллы), находясь под действием дисперсионных сил притяжения, взаимодействуют друг с другом, формируя каркас (остов) неорганического полимера.

Дать определение геля достаточно трудно. В соответствии с типом золя в золь-гель-системе протекают абсолютно различные физико-химические процессы. В полимерных гелях, как правило, есть ковалентные связи между молекулами и фрагментами молекул. Они образуют огромный кластер. Коллоидные гели формируются в результате действия сил Ван-дер-Ваальса между агрегатами. Подобные связи в коллоидных системах обратимы. Они могут разрушаться в процессе встряхивания, а затем восстанавливаться. В полимерных системах такие связи являются постоянно действующими.

С точки зрения коллоидной химии гель - это жидкая дисперсная система с жидкой дисперсионной средой, в которой частицы дисперсной фазы образуют пространственную структурную сетку. Гели представляют собой твердообразные ("студенистые") тела, способные сохранять форму, обладающие упругостью (эластичностью) и пластичностью. Типичные гели имеют коагуляционную структуру, т.е. частицы дисперсной фазы соединены в местах контакта силами межмолекулярного взаимодействия непосредственно или через тонкую прослойку дисперсионной среды. В химии и технологии полимеров гели - неплавкие и нерастворимые продукты поликонденсации или полимеризации. Момент времени, когда реакционная смесь теряет текучесть из-за сшивки растущих полимерных цепей, называется точкой гелеобразования или гель-точкой. Гелями называются также набухшие в растворителях сшитые линейные полимеры и растворы полимеров, потерявшие текучесть вследствие возникновения пространственной молекулярной сетки, стабилизированной химической или водородной связями либо в результате межмолекулярного взаимодействия. Гель состоит из непрерывных твердой и жидкой фаз, имеющих коллоидные размеры. Две эти фазы являются, в свою очередь, непрерывными взаимопроникающими системами.

В настоящее время считается, что с образованием фрактальной структуры золя начинается процесс гелеобразования. Происходит рост фрактальных агрегатов до таких размеров, что они начинают ударяться друг о друга и сцепляться (теория протекания). Расположенные случайным образом соседние кластеры соединяются вместе и образовывают единую структурную сетку.

После образования стягивающего кластера, который расширился по всему объему золя, точка образования геля согласуется с порогом протекания. Пройдя эту точку, золь начинает утрачивать свою подвиж-

ность и превращается в студенистую массу, преобразуется в «мокрый гель» (рис. 1).

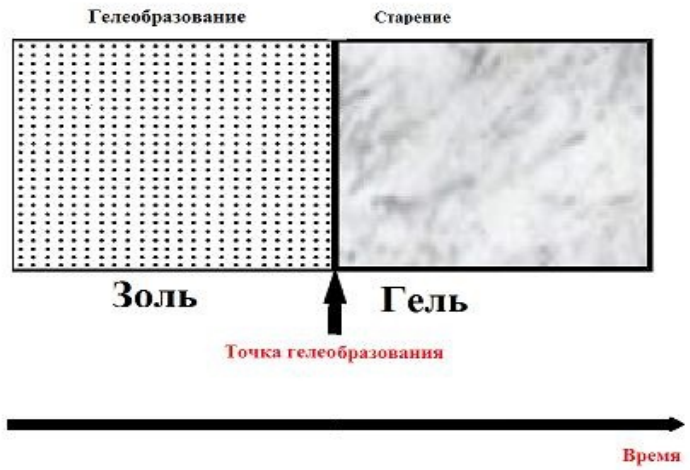


Рис. 1. Схема перехода золя в гель через точку гелеобразования

Как правило, форма мокрого геля зависит от сосуда, где он размещался (мокрый гель обретает конфигурацию этого сосуда) [5].

Процесс образования геля не останавливается в точке гелеобразования. Считают, что в ходе выдержки во времени гель начинает стареть [6]. Термин «старение геля» является научным. Это процесс структурных изменений, происходящих после прохождения точки гелеобразования в мокром геле. Единый кластер в нем соседствует с золем, содержащим большое число малых кластеров. Эти малые кластеры продолжают постоянный процесс включения к общему остову, то есть присоединяются к непрерывному огромному кластеру. Также в гелях возможно продолжение реакций конденсации, которые прошли не до конца в золях. Кроме того, протекают процессы переосаждения мономеров и олигомеров. Возможны фазовые переходы из твердой фазы в жидкость и наоборот.

Во время старения геля, как правило, совершается так называемая усадка гелей. Усадка геля включает деформацию сетки геля и удаление жидкости из пор. Высушенный гель называют ксерогелем. Ксерогель обычно уменьшается в объеме в 5-10 раз по сравнению с объемом мокрого геля [6]. Существуют специальные методы, которые позволяют высушить мокрый гель без разрушения его строения. В частности, современным способом получения аэрогелей (аэрогель – это ксерогель, в котором сохранился скелет мокрого геля, а поры вместо удаленной жидкой фазы наполнены воздухом) является суперкритическая сушка. Для этого мокрый гель помещается в автоклав и высушивается в суперкритических условиях (то есть при большом давлении и температуре, более низкой, чем нужна для сушки при атмосферном давлении), при которых

устраняется действие капиллярных сил, препятствующих вытеснению жидкости из пор.

После высушивания ксерогель и аэрогель подвергают обжигу. В этом процессе формируется стеклообразный или керамический материал, происходит большое количество сложных физических и химических процессов, которые связаны с разрушением органических фрагментов, встроенных в неорганическую сетку геля, удалением растворителей, летучих продуктов деструкции и химически связанной воды. Происходит преобразование структуры неорганического полимера – идет процесс спекания, а в некоторых случаях и кристаллизация [7].

Изучение золь-гель технологий в настоящее время является перспективным научным направлением и тесно связано с современными биотехнологиями. Золь-гель материалы – это перспективные материалы для применения в медицине и биотехнологиях.

Нами исследована возможность получения золей с использованием парогазового разряда с жидкими электродами [2]. Изучены режимы получения золей для применения в медицине, биохимии и биотехнологиях [2-9]. Ввиду сложности исследуемых явлений актуальным является математическое моделирование режимов получения золей для прогнозирования результатов технологических процессов.

Библиографический список

1. Brinker, C. J. Sol-Gel Science. The Physics and Chemistry of Sol-Gel Processing / C. J. Brinker, G. W. Scherer. – San Diego : Academic Press, 1990. – P. 2–8.

2. Павлова, А. А. Оценивание кислотности раствора в процессе получения золей методом наименьших модулей / А. А. Павлова, А. Ш. Шакиров, Р. К. Галимова // Математическое моделирование, численные методы и комплексы : материалы VIII Междунар. науч. молодеж. школы-семинара (16–20 июля 2018 г.) / отв. ред. В. Ф. Тишкин. – Саранск : СМВО, 2018. – С. 82–85. – URL: http://conf.svmo.ru/files/2018/ThesesSaransk2018.pdf (дата обращения: 31.03.2019).

3. Павлова, А. А. Усреднение показателя шероховатости поверхности за время обработки детали методом наименьших квадратов / А. А. Павлова, Р. В. Иутин, З. Я. Якупов // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ : материалы докладов VIII Междунар. науч. молодеж. школы-семинара им. Е. В. Воскресенского (Саранск, 16–20 июля 2018 г.) / отв. ред. В. Ф. Тишкин. – Саранск : СМВО, 2018. – С. 78–81. – URL: http://conf.svmo.ru/files/2018/ThesesSaransk2018.pdf (дата обращения: 31.03.2019).

4. Павлова, А. А. Трехфакторная модель процесса уменьшения шероховатости металлических поверхностей / А. А. Павлова, Р. В. Иутин, З. Я. Якупов, Р. К. Галимова // Математическое моделирование, численные методы и комплексы : материалы VIII Междунар. науч. молодеж. школы-семинара (16–20 июля 2018 г) / отв. ред. В. Ф. Тишкин. – Саранск : СМВО, 2018. –

С. 61–64. – URL: http://conf.svmo.ru/files/2018/ThesesSaransk2018.pdf (дата обращения: 31.03.2019).

5. Рempель, А. А. Материалы и методы нанотехнологий : учеб. пособие / А. А. Рempель, А. А. Валеева. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. – С. 95.

6. Мартынова, Д. О. Синтез и физико-химические свойства блочного пористого SiO_2 и композитов на его основе : дис. … канд. хим. наук : 02.00.04 / Мартынова Дарья Олеговна – Томск, 2014. – 179 с.

7. Ростокина, Е. Е. Получение особо чистых ультрадисперсных порошков алюмоиттриевого граната золь-гель методом : дис. … канд .хим. наук : 02.00.01 / Ростокина Елена Евгеньевна. – Нижний Новгород, 2015. – 147 с.

8. Якупов, З. Я. Методы наименьших квадратов и наименьших модулей в научно-технических расчётах / З. Я. Якупов, Р. К. Галимова. – Казань : Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. – 140 с.

9. Yakupov, Z. Ya. About the Hadamard matrices / Z. Ya. Yakupov // Science in the modern information society VI : Proceedings of the Conference / North Charleston, 13–14.07.2015. – Vol. 3. – North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. – P. 115–118.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УДАРА НА ГРАФИЧЕСКОМ ПРОЦЕССОРЕ

И. А. Абрамов, К. В. Митрофанова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
e-mail: igora379@gmail.com; vip.ksundra@mail.ru

В конструировании радиоаппаратуры широко применяются отдельные пластины и различные конструкции из пластин, прежде всего печатные платы. При эксплуатации, транспортировке, монтаже и т.д. радиоаппаратура может подвергаться ударным воздействиям. Малая толщина пластин по сравнению с ее другими размерами позволяет строить гипотезы о деформации по толщине, при этом, исключив одно измерение, перейти от трехмерной задачи к двухмерной.

Основной задачей при определении формы пластинчатых конструкций при ударах является численное решение бигармонического уравнения. Для решения этой задачи хорошо зарекомендовал себя разностный метод, который состоит из двух этапов:

1. Построение разностной схемы, которая аппроксимирует данную непрерывную задачу;

2. Получение решения разностной задачи.

Бигармоническое уравнение в частных производных имеет вид

$$-D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^4}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)=\rho h_z\frac{\partial^2 w}{dt^2}, \qquad (1)$$

где ρ – плотность материала пластины, h_z – толщина пластины, D – цилиндрическая жесткость, которая рассчитывается как

$$D=\frac{Eh_z^3}{12(1-\nu^2)}$$

где E – модуль Юнга, h_z – толщина пластины, ν – коэффициент Пуассона.

После замены частных производных в уравнении (1) конечными разностями, разностное уравнение примет следующий вид

$$-D\left[\frac{w_{i+2;j;k}-4w_{i+1;j;k}+6w_{i;j;k}-4w_{i-1;j;k}+w_{i-2;j;k}}{h_x^4}+\right.$$

$$+2\frac{w_{i+1;j+1;k}-2w_{i;j+1;k}+w_{i-1;j+1;k}}{h_x^2h_y^2}-4\frac{w_{i+1;j;k}-2w_{i;j+1;k}+w_{i-1;j;k}}{h_x^2h_y^2}+$$

$$+2\frac{w_{i+1;j-1;k}-2w_{i;j-1;k}+w_{i-1;j-1;k}}{h_x^2h_y^2}+$$

$$\left.+\frac{w_{i;j+2;k}-4w_{i;j+1;k}+6w_{i;j;k}-4w_{i;j-1;k}+w_{i;j-2;k}}{h_y^4}\right]=$$

$$=\rho h_z\frac{w_{i;j;k+1}-2w_{i;j;k}+w_{i;j;k-1}}{\tau^2}. \qquad (2)$$

При определении формы пластины при ударных воздействиях решалась задача падения жестко закрепленной по контуру с помощью двух рамок пластины на жесткую поверхность. Предполагается, что в момент времени $t = 0$ нижняя из рамок касается поверхности и останавливается. Также останавливаются и защемленные края пластины и остаются неподвижными. Для упрощения расчетов был выбран шаг по осям x и y одинаковым, т.е. $h_x = h_y = h$.

Чтобы разностный шаблон мог действовать для всех узловых точек пластины, в которых рассчитывается прогиб, было введено два слоя законтурных узлов, в которые записаны нулевые значения прогибов.

Начальные условия заданы в виде двух матриц, которые соответствуют моментам времени $k = 1$ и $k = 2$. При этом предполагается для простоты расчётов, что за шаг до удара расстояние от пластины до по-

верхности равна -1 (k = 1), а в момент соприкосновения с поверхностью пластина еще не деформировалась, и все прогибы равны нулю (k = 2).

Решение уравнения (2) производится относительно неизвестного прогиба на верхнем временном слое (k+1):

$$w_{i,j;k+1} = -A\Big(w_{i+2,j;k} + 2w_{i+1,j+1;k} - 8w_{i+1,j;k} + 2w_{i+1,j-1;k} +$$

$$+w_{i,j+2;k} - 8w_{i,j+1;k} + 20w_{i,j;k} - 8w_{i+1,j;k} + w_{i,j-2;k} + 2w_{i+1,j+1;k} -$$

$$-8w_{i-1,j;k} + 2w_{i+1,j+1;k} + w_{i-2,j;k}\Big) + 2w_{i,j;k} - w_{i,j;k-1},$$

где $A = \dfrac{D\tau^2}{\rho h_z h^4} = \dfrac{Eh_z^2\tau^2}{12\left(1-\nu^2\right)h^4}$

В вычислительных экспериментах рассчитывалась деформация квадратной платы со стороной 0,14 м и толщиной h_z=0,00133м. Материал платы – стеклотекстолит, $E = 3{,}3 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 2{,}47 \cdot 10^{10}$ кг / м^3, $\nu = 0{,}279$. Рассчитанное значение цилиндрической жесткости составило $D = 7{,}02$ Н / м. Шаг по времени – τ = 4,9 мкс.

Программная реализация алгоритма помимо задания начальных и граничных условий содержит основной цикл вычислений, реализующий итерационный процесс вычислений прогибов пластины. В этом цикле выполняется расчет матрицы прогибов на временном слое k+1 на основе данных о временных слоях k-1 и k. После выполнения очередной итерации вычислений полученная матрица прогибов на слое k+1 на следующей итерации используется для расчетов как данные о временном слое k, а матрица, которая содержала данные о прогибах пластины слоя k, на новой итерации будет определять слой k-1. Сохранение результата, полученного на следующей итерации, теперь выполняется в матрицу, которая на предыдущей итерации содержала данные о слое k-1. Итерационный процесс продолжается до достижения заданного времени t.

Достичь более высоких показателей аппроксимации формы пластины можно за счет уменьшения шага дискретизации, то есть увеличения количества расчетных узлов модели. Все это ведет к увеличению времени вычислений. Вычисление элемента $w_{i,j}$ на k+1 временном слое представляет собой операцию с высокой степенью параллелизма, которую для всех элементов модели можно выполнить независимо. Такие операции можно реализовать на графическом процессоре с поддержкой CUDA [3], представляющую собой платформу параллельных вычислений общего назначения и модель программирования. CUDA – платформа параллельных вычислений общего назначения и модель программирования, которая использует параллельный вычислительный движок в графических процессорах NVIDIA [4].

Функция ядра, имеющая атрибут **__global__** организует вычисление элемента $w_{i,j}$ на k+1 временном слое. Эта функция принимает в качестве аргументов указатели на матрицы начальных условий, соответствующих моментам времени $k = 1$ и $k = 2$, и матрицу временного слоя k+1. Также параметрами функции являются размеры расчетной модели пластины. В теле функции элемент $w_{i,j}$ индексируется с помощью переменной

```
tid = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x,
```

где **threadIdx.x** – номер потока в блоке, **blockIdx.x** – номер блока в сетке и **blockDim.x** – размер блоков. В теле функции организуется цикл по времени с заданным временным шагом **τ**. В цикле после вычисления элемента $w_{i,j}$ на k+1 временном слое выполняется синхронизация по всем потокам, для того, чтобы каждый из них закончил расчет своего элемента $w_{i,j}$ до выполнения следующей итерации. По окончании цикла выполнялась запись результата в элемент матрицы, которая первоначально определяла k+1 временной слой, индексируемый переменной **tid**.

В основной функции выполняется задание граничных и начальных условий, выделение в видеопамяти места для размещения матриц временных слоев, копирование начальных данных из основной памяти в видео память и вызов функции ядра. При вызове функции ядра были заданы размеры блоков, равные 32 потокам, и размеры сетки, которые рассчитывались исходя из размеров матриц и размеров блоков

```
dim3 grid((n + 32 - 1) / 32).
```

Программная реализация определения формы пластины при ударном воздействии была выполнена на языке C++, CUDA C и скомпилированы с помощью компиляторов gcc 7.3.0 и nvcc V10.0.130. Эксперименты с программой проводились на компьютере на базе процессора Intel Core i7-3770, 3,4 ГГц, 8 Гб ОЗУ, видеокарта NVIDIA GXT 1050Ti, под управлением операционной системы Ubuntu 18.04. Ниже на рисунке представлен результат работы программы, которая определяла форму пластины при падении на жесткую поверхность. В расчетной модели пластины было задано 100×100 узловых элементов.

В ходе эксперимента также были оценены временные показатели выполнения программы на центральном и графическом процессорах, при этом, размеры моделей пластин задавались равными 1000×1000, 2000×2000 и 4000×4000. В параллельной программе фиксировалось время на только непосредственно вычислений, но и то, которое затрачено на копирование исходных данных из основной памяти в видеопамять и обратно результата. Результаты представлены таблице 1.

Как видно из таблицы, время на выполнение программы на графическом процессоре было затрачено меньше, чем при выполнении последовательной программы.

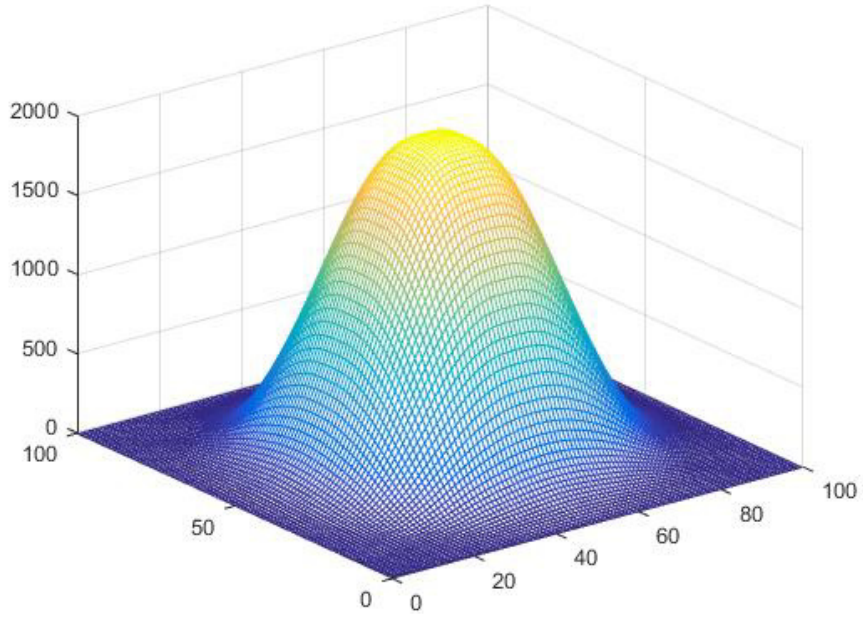


Рис. 1. Форма пластины после падения на жесткую поверхность

Таблица 1

Время работы (в секундах) последовательной и параллельной программ

Размер модели	**Последовательная реализация**	**Параллельная реализация**	**Ускорение**
1000×1000	26,7	2,5	10,68
2000×2000	105,2	10,4	10,11
4000×4000	429,8	40,9	10,5

Графические процессоры можно рассматривать как системы с массивным параллелизмом, которые позволяют одновременно выполнять множество потоков, несмотря на временные издержки, связанные с перемещением данных между основной памятью компьютера и видеопамятью, позволяют значительно сократить время работы программы, содержащей большое число операций, которые могут выполняться параллельно.

Библиографический список

1. Талицкий, Е. Н. Механические воздействия и зашита электронной аппаратуры : учеб. пособие : в 3 ч. / Е. Н. Талицкий ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2005. – Ч. 2. – 124 с.

2. Маквецов, Е. Н. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры : учебник для вузов / Е. Н. Маквецов, А. М. Тартаковский. – Москва : Радио и связь, 1993. – 200 с.

3. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA : учеб. пособие / А. В. Боресков, А. А. Харламов и др. ; предисл.: В. А. Садовничий. – 2-е изд. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 2015.

4. Cheng, J. Professional CUDA C Programming / J. Cheng, M. Grossman, T. McKercher. – Indianopolis : WROX, 2014.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Н. П. Кривулин, М. О. Колотилов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: krivulin@bk.ru; walfar@devcorp.ru

Введение

Проблема восстановления входных сигналов измерительных преобразователей (ИП) занимает одну из ключевых позиций во многих областях техники. Она возникает при динамических измерениях, в радиолакции, теории разпознавания изображений, теории связи и т. д. Обзоры методов решения данной проблемы можно найти в работах [1, 2] и в цитируемых в них литературе. Ряд методов восстановления входных сигналов ИП (непрерывных, дискретных) представлены в работах [3-4].

Как отмечается в монографии [2], существует два подхода к решению данной проблемы. Первый, априорный, который заключается в том, что путем совершенствованием конструкции измерительных систем добиваются минимума искажений в системе приема сигнала, и второй, апостериорный, в основу которого положены алгоритмы восстановления входного сигнала по выходному сигналу. Построение таких алгоритмов осуществляет редукцию к идеальному прибору.

В данной работе используется второй подход, основанный на алгоритмических методах определения водогого сигнала нестационарных измерительных преобразователей (ИП), математические модели которых являются моделями типа «вход-выхо», описываемы уравнениями вида

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ − входной сигнал; $f(t)$ − выходной сигнал; $g(t,\tau)$ − импульсная переходная функция, которая удовлетворяет условию физической реализуемости функции $g(t,\tau)=0$ при $t<\tau$.

Постановка задачи

Рассмотрим нестационарный измерительный преобразователь, описываемый уравнением (1) с известной импульсной переходной функцией $g(t,\tau)$.

Требуется по наблюдаемому выходному сигналу $f(t)$ определить функцию $x(t)$ – входной сигнал.

Восстановление входного сигнала измерительного преобразователя

Восстановление входного сигнала будем проводить методом, основанный на подходе, который изложен в работе [3].

Для системы линейно независимых функций на отрезке $[0,T]$ $\varphi_k(\tau)$, k=0,1,…,*N-1* поставим в соответствие систему функций $x_k(t)$, k=0,1,…,*N-1,* каждая из которой является решением интегрального уравнения:

$$\int_0^t g(t,\tau)x_k(\tau)d\tau = \phi_k(t),\ k = 0,1,...,N-1,\ 0 \le t \le T. \qquad (2)$$

Приближенные значения входного сигнала определим по формуле

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k x_k(t), \qquad (3)$$

где γ_k, k=0,1,…,N-1 коэффициенты разложения выходного сигнала – функции $f(t)$ по базисным функциям на отрезке $[0,T]$ $\varphi_k(\tau)$, k=0,1,…,*N-1*, на отрезке $[0,T]$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \phi_k(t). \qquad (4)$$

Дейсвительно, домножая равенства на γ_k, k=0,1,…,N-1 и суммируя, получим:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \left(\int_0^t g(t,\tau)x_k(t)\,d\tau \right) = \int_0^t g(t,\tau) \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k x_k(t) d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \phi_k(t) = f(t).$$

Отсюда следует справедливость (3).

Реализации предложенного метода состоит из следующих этапов:

1. выбрать систему базисных функций $\varphi_k(\tau)$, k=0,1,…,*N-1*.

2. определить функции $x_k(t)$, k=0,1,…,*N-1*, из решения интегральных уравнений (2).

3. для наблюдаемого выходного сигнала $f(t)$ определить коэффициенты γ_k, k=0,1,…,N-1 разложения (4).

4. восстановление входного сигнала проводится по формуле (3.)

Численный пример

Рассмотрим ИП, описываемый уравнением (1) с импульсной переходной функцией $g(t,\tau)=(t-\tau)cos(t\tau)$.

Пусть на отрезке времени [0,3] наблюдаемый выходной сигнал имеет вид:

$$f(t)=\frac{(1+t)^2\sin\left(t(t-1)\right)-(1-t)^2\sin\left(t(t+1)\right)-2t\left(t^2-1\right)}{2\left(t^2-1\right)^2}.$$

При это точное значение входного сигнала $x(t)= sin(t\tau)$.

Согласно этапам реализации метода:

1. в качестве базисных функции возьмем t^k, $k=0,1,2,...,8$.

2. определим функции $x_k(t)$, k=0,1,…,8, из решения интегральных уравнений

$$\int_0^t (t-\tau)\cos(t\tau)x_k(\tau)d\tau = t^k,\ k=0,1,...,8,\ \ 0\le t\le 3.$$

3. для наблюдаемого выходного сигнала $f(t)$ определим коэффициенты γ_k, k=0,1,…,N-1 разложения (4), которые представлены в таблице 1.

4. результаты восстановления входного сигнала по формуле (3) приведены на рис. 1 (точное значение входного сигнала $x(t)= sin(t\tau)$). Максимальная абсолютная погрешность восстановления составила 0.0015.

Таблица 1

Коэффициенты разложения выходного сигнала по базисным функциям

k	0	1	2	3	4	5	6	7
α_k	0.19	-2.06	7.65	-13.65	13.56	-7.31	1.96	-0.20

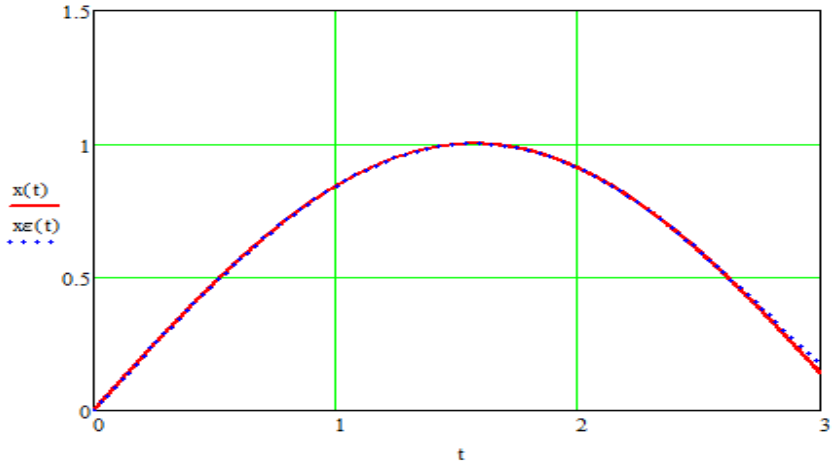


Рис. 1. Точные $x(t)$ и приближенные $x\varepsilon(t)$ значения входных сигналов

Заключение

Предложенный метод позволяет: 1) избежать влияния шума при вычислениях; 2) создать обширную базу данных для ИП различной природы за счет выбора различных базисных функций.

Библиографический список

1. Бойков, И. В. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем : монография / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин.– Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – 398 с.

2. Василенко, Г. И. Теория восстановления сигналов / Г. И. Василенко. – Москва : Сов. радио, 1979. – 272 с.

3. Кривулин, Н. П. Восстановление входных сигналов нестационарных динамических систем / Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 3 (47). – С. 64–78.

4. Бойков, И. В. Восстановление входных сигналов дискретных динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. – 2017. – № 11. – С. 3–7.

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: i.v.boykov@gmail.com; ryazantsevv@mail.ru

В работе строится аналитический метод одновременного определения характеристик нескольких гравитирующих тел в обратной задаче теории логарифмического потенциала. Для этого используется математическая модель, аналогичная построенной авторами в статье [1], при некоторых упрощающих предположениях, проведенных при нелинейной аппроксимации обратной задачи теории логарифмического потенциала. На основе этой модели строится система интегральных уравнений, описывающая упомянутую задачу. Выполнение в этой системе замены неизвестных функций позволяет после применения к ней преобразования Фурье получить параметрическую систему линейных уравнений в спектральной области. Применение обратного преобразования Фурье к аналитическому решению этой задачи и последующий возврат к исходным функциям, определяющим форму и плотность тела, завершает постро-

ние аналитического метода. Отметим, что в качестве исходных данных при решении задачи восстановления в данной работе используются значения потенциала аномального гравитационного поля, измеренного на поверхности Земли. Эффективность описываемого метода иллюстрируется решением модельного примера. Важным достоинством предлагаемого метода является возможность его численной реализации.

Задача определения характеристик гравитирующего тела на основании известных параметров создаваемой им гравитационной аномалии решалась различными авторами (см., напр., [2-4]). Вместе с тем, как правило, постановка указанной задачи предполагает определение либо только формы тела при известной плотности, либо плотности тела при известной его форме. Для этого чаще всего используются линейные модели, не позволяющие добиться достаточно высокой точности решения задачи.

В то же время, отличительными особенностями данной статьи являются: а) использование нелинейной математической модели рассматриваемой задачи; б) одновременное определение нескольких характеристик источников аномальных полей сил тяжести (таких, как плотность и форма), а также в) возможность эффективной численной реализации описываемого метода.

Предположим, что источники аномалий сил тяжести имеют бесконечную протяжённость и постоянные значения характеристик в направлении оси *Oy*; тогда задачу можно рассматривать как двухмерную. Введём в рассмотрение двухмерную декартову систему координат *Oxz*, направив ось *Oz* вертикально вниз.

Предположим, что наблюдаемая аномалия гравитационного поля создаётся двумя источниками.

Первый источник представляет собой горизонтальный пласт, имеющий бесконечную протяжённость в направлении оси *Oy*. Плотность пласта определяется функцией $\rho_1(x)$, а сам он располагается между поверхностями $z = H_1$ и $z = H_2$, где $H_1 < H_2$, причём имеет место неравенство $H_2 - H_1 \ll H_2$.

Второй источник – тело, имеющее плотность, которая определяется функцией $\rho_2(x)$. Оно расположено между поверхностями $z = H_1$ и $z = H_1 - \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – неотрицательная функция формы поверхности, удовлетворяющая неравенству $\varphi(x) \ll H_1$.

Потенциалы гравитационных аномалий, создаваемых первым и вторым источниками соответственно, определяются следующими формулами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(s) \ln\left(\frac{(x-s)^2 + (z-H_2)^2}{(x-s)^2 + (z-H_1)^2} \right) ds = f_1(x,z), \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_2(s) \ln\left(\frac{(x-s)^2 + (z-H_1)^2}{(x-s)^2 + \left(z-(H_1-\varphi(s))\right)^2} \right) ds = f_2(x,z). \qquad (2)$$

Замечание 1. По соображениям простоты в уравнениях (1) - (2) опущена гравитационная постоянная G.

В работе [1] описан способ построения аппроксимаций уравнений теории логарифмического потенциала. Построения основаны на разложении подынтегральной функции в ряд Тейлора с учётом членов до второго порядка включительно и серии последующих упрощений. В результате получаются существенно более простые, но тем не менее попрежнему нелинейные уравнения. Для уравнения (1) соответствующая аппроксимация имеет следующий вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(s) \frac{2(H_2-z)(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2}{(x-s)^2+(H_2-z)^2} ds = f_1(x,z). \qquad (3)$$

Уравнение (2) аппроксимируется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_2(\xi) \frac{2(H_1-z)\varphi(\xi)-\varphi^2(\xi)}{(x-\xi)^2+\left(H_1-z\right)^2} d\xi = f_2(x,z). \qquad (4)$$

Уравнения (3) - (4) служат основой для построения математических моделей различных задач одновременного восстановления параметров источников гравитационных аномалий.

Рассмотрим следующую задачу. Предположим, что в число известных исходных данных входят следующие величины:

– глубина залегания тела H_1;

– глубина залегания пласта H_2;

– суммарный потенциал $f(x,0) = f_1(x,0) + f_2(x,0)$ аномального поля сил тяжести, создаваемого обоими источниками, на поверхности Земли ($z = 0$), а также на высотах $z = -h_1$ и $z = -h_2$ от поверхности.

При этих условиях поставим задачу об одновременном определении:

– плотности пласта $\rho_1(x)$;

– плотности тела $\rho_2(x)$;

– формы тела $\varphi(x)$.

Замечание 2. Поскольку известными являются суммы потенциалов аномальных гравитационных полей, создаваемых двумя различными источниками, то описанная задача фактически представляет собой задачу разделения полей.

Используя аппроксимации (3) - (4), составим систему нелинейных интегральных уравнений.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\rho_1(s)\frac{2H_2(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2}{(x-s)^2+H_2^2}+\right.$$

$$\left.+\rho_2(s)\frac{2H_1\varphi(s)-\varphi^2(s)}{(x-s)^2+H_1^2}\right\}ds=f(x,0), \qquad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\rho_1(s)\frac{2(H_2+h_1)(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2}{(x-s)^2+(H_2+h_1)^2}+\right.$$

$$\left.+\rho_2(s)\frac{2(H_1+h_1)\varphi(s)-\varphi^2(s)}{(x-s)^2+(H_1+h_1)^2}\right\}ds=f(x,-h_1), \qquad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\rho_1(s)\frac{2(H_2+h_2)(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2}{(x-s)^2+(H_2+h_2)^2}+\right.$$

$$\left.+\rho_2(s)\frac{2(H_1+h_2)\varphi(s)-\varphi^2(s)}{(x-s)^2+(H_1+h_2)^2}\right\}ds=f(x,-h_2). \qquad (7)$$

Введём следующую замену неизвестных функций:

$$u_1(x)=\rho_1(x),\quad u_2(x)=\rho_2(x)\varphi(x),\quad u_3(x)=\rho_2(x)\varphi^2(x).$$

Тогда система (5) – (7) перепишется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\left[2H_2(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2\right]u_1(s)}{(x-s)^2+H_2^2}+\frac{2H_1u_2(s)-u_3(s)}{(x-s)^2+H_1^2}\right\}ds=f(x,0), \qquad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\left[2(H_2+h_1)(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2\right]u_1(s)}{(x-s)^2+(H_2+h_1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(H_1+h_1)u_2(s)-u_3(s)}{(x-s)^2+(H_1+h_1)^2}\right\}ds=f(x,-h_1), \qquad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\left[2(H_2+h_2)(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2\right]u_1(s)}{(x-s)^2+(H_2+h_2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(H_1+h_2)u_2(s)-u_3(s)}{(x-s)^2+(H_1+h_2)^2}\right\}ds=f(x,-h_2). \qquad (10)$$

Прямое и обратное преобразования Фурье обозначаются и определяются следующим образом:

$$F(\omega)=\mathfrak{F}\left[f(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx,$$

$$f(x)=\mathfrak{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}\,d\omega.$$

Кроме того, известно ([5]), что

$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{x^2+H^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{H}\cdot e^{-H|\omega|}.$$

Применение преобразования Фурье к системе (8) - (10) приводит к следующей параметрической системе линейных уравнений в спектральной области:

$$\begin{cases}\dfrac{2H_2(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2}{H_2}e^{-(H_2-H_1)|\omega|}U_1(\omega)+\\ \quad+2U_2(\omega)-\dfrac{U_3(\omega)}{H_1}=\tilde{F}_1(\omega),\\ \dfrac{2(H_2+h_1)(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2}{H_2+h_1}e^{-(H_2-H_1)|\omega|}U_1(\omega)+\\ \quad+2U_2(\omega)-\dfrac{U_3(\omega)}{H_1+h_1}=\tilde{F}_2(\omega),\\ \dfrac{2(H_2+h_2)(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2}{H_2+h_2}e^{-(H_2-H_1)|\omega|}U_1(\omega)+\\ \quad+2U_2(\omega)-\dfrac{U_3(\omega)}{H_1+h_2}=\tilde{F}_3(\omega),\end{cases}\qquad(11)$$

где

$$\tilde{F}_1(\omega)=\frac{e^{H_1|\omega|}}{\pi}F_1(\omega),\ \tilde{F}_2(\omega)=\frac{e^{(H_1+h_1)|\omega|}}{\pi}F_2(\omega),\ \tilde{F}_3(\omega)=\frac{e^{(H_1+h_2)|\omega|}}{\pi}F_3(\omega).$$

Система (11) допускает аналитическое решение, которое имеет следующий вид:

$$U_1(\omega)=\frac{h_1h_2\left(\tilde{F}_3(\omega)-\tilde{F}_2(\omega)\right)+H_1h_2\left(\tilde{F}_1(\omega)-\tilde{F}_2(\omega)\right)+H_1h_1\left(\tilde{F}_3(\omega)-\tilde{F}_1(\omega)\right)}{h_1h_2(h_1-h_2)}\times$$

$$\times\frac{H_2(H_2+h_1)(H_2+h_2)}{(H_1-H_2)^3}\times e^{(H_2-H_1)|\omega|},\qquad(12)$$

$$U_2(\omega)=\frac{(H_1+h_1)G_2(\omega)-H_1G_1(\omega)}{2h_1},\qquad(13)$$

$$U_3(\omega)=\frac{H_1}{h_1}\cdot\left[\left(H_1+h_1\right)\cdot\left(G_2(\omega)-G_1(\omega)\right)\right], \qquad (14)$$

где $\tilde{F}_1(\omega)=\dfrac{e^{H_1|\omega|}F_1(\omega)}{\pi}$, $\tilde{F}_2(\omega)=\dfrac{e^{(H_1+h_1)|\omega|}F_2(\omega)}{\pi}$, $\tilde{F}_3(\omega)=\dfrac{e^{(H_1+h_2)|\omega|}F_3(\omega)}{\pi}$,

$$G_1(\omega)=\tilde{F}_1(\omega)-\frac{2H_2(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2}{H_2}\cdot e^{-(H_2-H_1)|\omega|}U_1(\omega),$$

$$G_2(\omega)=\tilde{F}_2(\omega)-\frac{2(H_2+h_1)(H_2-H_1)-(H_2-H_1)^2}{H_2+h_1}\cdot e^{-(H_2-H_1)|\omega|}U_1(\omega).$$

К найденным по формулам (12)-(14) функциям $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, $U_3(\omega)$ применяется обратное преобразование Фурье, результатом чего оказываются функции $u_1(x)=\mathfrak{F}^{-1}\left[U_1(\omega)\right]$, $u_2(x)=\mathfrak{F}^{-1}\left[U_2(\omega)\right]$, $u_3(x)=\mathfrak{F}^{-1}\left[U_3(\omega)\right]$. Тогда искомые неизвестные функции $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, $\varphi(x)$ выражаются через функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ по следующим явным формулам:

$$\rho_1(x)=u_1(x), \quad \rho_2(x)=\frac{u_2^2(x)}{u_3(x)}, \quad \varphi(x)=\frac{u_3(x)}{u_2(x)}. \qquad (15)$$

Рассмотрим модельный пример.

Пример 1. Требуется найти решение $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, $\varphi(x)$ задачи (5) - (7) при следующих исходных данных:

$$H_1=1, \qquad H_2=\frac{11}{10}, \qquad h_1=\frac{1}{10}, \qquad h_2=\frac{1}{5},$$

$$f(x,0)=\frac{441}{11}\cdot\frac{\pi}{100x^2+441}+\frac{\pi}{1350}\cdot\frac{86x^4+7733x^2+98352}{x^6+41x^4+544x^2+2304},$$

$$f(x,-h_1)=\frac{253}{24}\cdot\frac{\pi}{25x^2+121}+$$

$$+\frac{10\pi}{297}\cdot\frac{2090000x^4+185831800x^2+2460629309}{1000000x^6+43230000x^4+605664300x^2+2715556321},$$

$$f(x,-h_2)=\frac{575}{13}\cdot\frac{\pi}{100x^2+529}+$$

$$+\frac{\pi}{54}\cdot\frac{65000x^4+5750825x^2+79178904}{15625x^6+711250x^4+10506825x^2+49787136}.$$

Преобразования Фурье функций $f(x,0)$, $f(x,-h_1)$, $f(x,-h_2)$, выглядят следующим образом:

$$F_1(\omega)=\frac{\sqrt{2}\cdot\pi^{3/2}}{29700}\cdot\left((165\,|\,\omega\,|-1727)e^{-4|\omega|}+2673e^{-3|\omega|}+2835e^{-(21/10)|\omega|}\right),$$

$$F_2(\omega)=\frac{\sqrt{2}\cdot\pi^{3/2}}{23760}\Big((120\,|\,\omega\,|-1400)e^{-(41/10)|\omega|}+$$

$$+2160e^{-(31/10)|\omega|}+2277e^{-(11/5)|\omega|}\Big),$$

$$F_3(\omega)=\frac{\sqrt{2}\cdot\pi^{3/2}}{42120}\cdot\Big((195\,|\,\omega\,|-2509)e^{-(21/5)|\omega|}+$$

$$+3861e^{-(16/5)|\omega|}+4050e^{-(23/10)|\omega|}\Big).$$

Подстановка этих функций в правые части уравнений системы (11) и её последующее решение по формулам (12) - (14) даёт:

$$U_1(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|},\quad U_2(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{1800}}\cdot\left(3e^{-2|\omega|}-2e^{-3|\omega|}\right),$$

$$U_3(\omega)=\frac{1}{1350}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(27e^{-2|\omega|}-(15\,|\,\omega\,|+23)e^{-3|\omega|}\right).$$

Применяя обратное преобразование Фурье, имеем:

$$u_1(x)=\mathfrak{F}^{-1}\left(U_1(\omega)\right)=\frac{1}{x^2+1},\quad u_2(x)=\mathfrak{F}^{-1}\left(U_2(\omega)\right)=\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)},$$

$$u_3(x)=\mathfrak{F}^{-1}\left(U_3(\omega)\right)=\frac{1}{(x^2+4)^2(x^2+9)}.$$

Подставляя функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ в формулы (15), получаем окончательно:

$$\rho_1(x)=\frac{1}{x^2+1},\quad \rho_2(x)=\frac{1}{x^2+4},\quad \varphi(x)=\frac{1}{x^2+9}.$$

Замечание 3. Описанный аналитический метод допускает эффективную численную реализацию. В самом деле, зафиксируем на вещественной оси множество из N различных точек $\{\omega_k\}$, которые будем рассматривать, как точки коллокаций для системы (11); при этом правые части уравнений системы могут быть определены приближённо по одной из квадратурных формул вычисления преобразований Фурье. Полученные системы могут быть решены при помощи одного из итерацион-

ных методов, например, метода, описанного в работе [6]. Этот метод может быть также применён и для определения значений функций $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, $\varphi(x)$ из решения системы уравнений (8) – (10). Предварительно система уравнений (8) – (10) может быть аппроксимирована системой линейных алгебраических уравнений, полученной методом механических квадратур.

Библиографический список

1. Бойков, И. В. Приближенные методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в обратной задаче теории потенциала / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 3. – С. 21–31.

2. Гласко, В. Б. О восстановлении глубины и формы контактной поверхности на основе регуляризации / В. Б. Гласко, А. Х. Остромогильский, В. Г. Филатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10, № 5. – С. 1292–1297.

3. Старостенко, В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии / В. И. Старостенко. – Киев : Наукова думка, 1978. – 228 с.

4. Бойков, И. В. Об одном параллельном методе решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия Российской Академии наук. Физика Земли. – 2009. – № 3. – С. 73–82.

5. Брычков, Ю. А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю. А. Брычков, А. П. Прудников. – Москва : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 288 с.

6. Обломская, Л. Я. О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах / Л. Я. Обломская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 417–426.

ОБНАРУЖЕНИЕ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ МИКРОТРЕЩИН В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЯХ МЕТОДОМ АКУСТОИМЕССИОННОГО БИНАРНОГО ДАТЧИКА

А. В. Рудин, И. М. Семенов,
И. А. Рубцов, С. А. Потешкин, М. С. Никитина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: physics@pnzgu.ru

В процессе технологического производства и изготовления элементов многих машин и конструкций в их объеме появляются точечные-одномерные, линейные-двумерные и объемные-трехмерные мик-

родефекты, которые в процессе их эксплуатации могут привести к преждевременному выходу из рабочего состояния или аварии.

Своевременное обнаружение и локализация микродефектов высокотехнологических и наукоемких объектов – реакторы атомных электростанций, автоклавы высокого давления, двигатели турбореактивных летательных аппаратов и космической техники, опорные и пролетные конструкции стратегических мостов и путепроводов, трубопроводы нефтяных и газовых веток, является актуальной задачей современного машиностроения.

Методы ультразвуковой, рентгеноструктурной и электронно-микроскопической дефектоскопии позволяют определить только сам факт наличия микродефекта и не дают информации о степени его опасности, механизма развития и перемещения последнего внутри исследуемого объекта.

Одним из оптимальных неразрушающих методов контроля дефектной структуры твердых тел в настоящее время является метод акустической эмиссии (АЭ). Метод АЭ основан на зависимости числа и амплитудно-частотной характеристики акустических сигналов-импульсов от типа и геометрических параметров, образующихся и развивающихся микродефектов (МД), типа микротрещин в твердом теле в режиме их эксплуатации или при воздействии внешнего механического напряжения [1].

В данной работе приводится описание акустического метода, позволяющего обнаружить и локализовать место положения микродефекта, типа микротрещины на стадии его образования и развития в объеме протяженных металлических деталей или конструкций с помощью акустоэмиссионного бинарного датчика. Местоположение микродефекта определяется по величине времени задержки одиночного акустического сигнала-импульса или акустического пакета импульсов акустической эмиссии, которые регистрируются бинарным датчиком, подключенных к двумя идентичным электронным каналам, выходы которых подключены к электронному блоку измерения временного интервала. Бинарный акустоэмиссионный датчик образован двумя идентичными приемниками акустических сигналов, которые размещены в крайних точках исследуемого объекта. Возбуждение сигналов акустической эмиссии ультразвукового диапазона частот в исследуемом объекте осуществляется как в пассивном режиме их эксплуатации, так и в активном режиме – режиме продольной упругой деформации или поперечного изгиба.

Акустический прибор образован бинарным датчиком, состоящим из двух идентичных приемников акустических сигналов, подключенных к двум идентичным электронным каналам, предназначенных для усиления слабых электрических сигналов ультразвукового диапазона частот, с последующим их сравнением и определением времени за-

держки одиночного сигнала, принимаемого каждым каналом в отдельности. Структурная блок-схема акустоэмиссионного электронного устройства с бинарным датчиком приведена на рисунке 1.

Основными элементами акустического электронного прибора являются два идентичных ультразвуковых датчика-преобразователя сигналов акустической эмиссии ДАЭ-1 и ДАЭ-2, которые с помощью специальных креплений 2 и 3 закрепляются на боковой поверхности исследуемого объекта 8 (см. рис. 2). Конструкция датчиков акустической эмиссии с совмещенным предварительным электронным усилителем, подробно описана в работе [2] и приведена на рисунке 2.

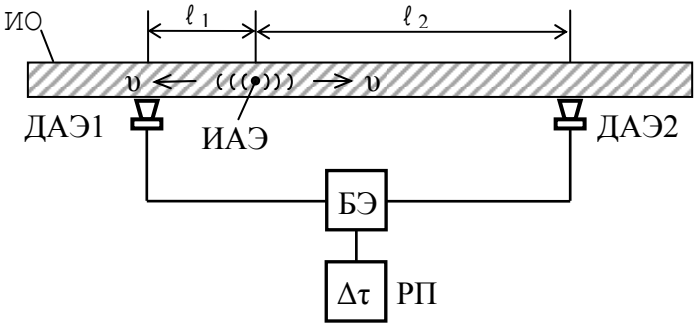


Рис. 1. Структурная блок-схема двухканального акустического прибора

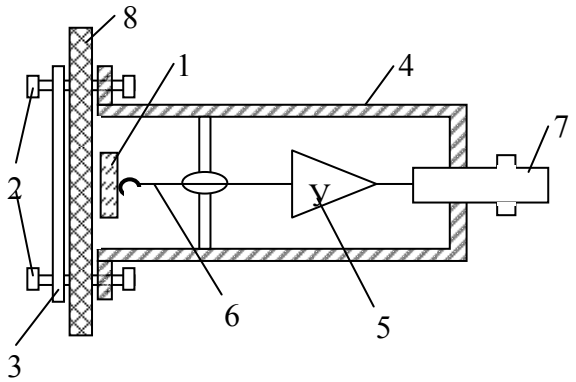


Рис. 2. Конструкция датчика акустической эмиссии с совмещенным предварительным электронным усилителем

Датчик акустической эмиссии ДАЭ-1 выполнен в виде полого тонкостенного металлического цилиндра 4, основанием которого является плоскопараллельная тонкая пластина 8, на внутренней поверхности которой с помощью прижимной пластинки - электрического контакта крепится дисковый пьезоэлектрический преобразователь 1, типа $BaTiO_3$, с резонансной частотой $f_o = 7\ МГц$. Прижимной контакт непосредственно подключен к входу предварительного электронного усилителя 5, выход которого подключен к ВЧ-разъему 7, типа СР-50, который ввинчивается в торцевое основание цилиндра 4. Электронный усилитель 5 выполнен на высокочастотном транзисторе, типа КТ-342Б, по схеме с об-

щим эмиттером с большим входным сопротивлением, которая обеспечивает большой коэффициент усиления и малый уровень собственных шумов. Предлагаемая конструкция датчиков акустической эмиссии обеспечивает полную экранировку от внешних электромагнитных полей и позволяют их размещать с удалением от электронного блока на расстояние до 50 метров.

Электронная блок-схема двухканального акустического прибора приведена на рисунке 3. Выходы датчиков ДАЭ-1 и ДАЭ-2 через коаксиальные ВЧ- кабели подключены к входам широкополосных усилителей электрических колебаний УШ-1 и УШ-2 с полосой частот $\Delta f = 20 \div 1000$ *кГц*. Выход усилителя УШ-1 подключен к входу персонального компьютера ПК (ноутбуку) и через детектор Д1 - к триггеру Шмидта ТШ-1. Выход триггера ТШ-1 подключен одновременно к входу блока импульсной задержки БЗ-1 и первому входу симметричного триггера ТС-1. Выход БЗ-1 подключен к второму входу симметричного триггера ТС-2 второго канала прибора. Второй вход симметричного триггера ТС-1 подключен к выходу блока задержки БЗ-2 второго канала. Выходы симметричных триггеров ТС-1 и ТС-2 обоих каналов через импульсные диоды D1 и D2 подключены к входу блока измерения временного интервала, выполненного в виде интегрирующей цепочки RC и блока импульсной задержки БЗК, совмещенного с блоком электронного коммутатора. Выходы блоков RC и БЗК подключены к регистрирующему прибору РП, типа ЕМ-362 (цифровой мультиметр), который непосредственно регистрирует временную задержку импульсов АЭ, с последующим обнулением показаний.

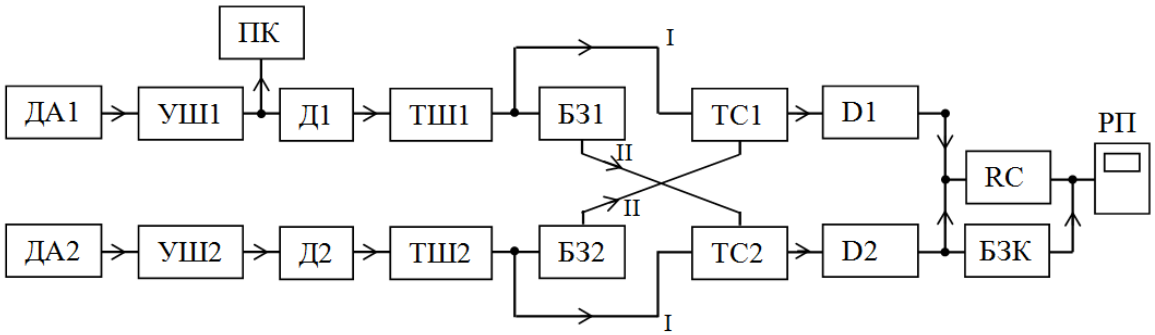


Рис. 3. Электронная блок-схема двухканального акустического прибора

В режиме активной или пассивной упругой деформации исследуемого объекта в кристаллической решетки происходят структурные изменения и локальные перестройки, которые приводят к образованию и росту микродефектов, типа микротрещин. Процесс образования, роста и перемещения микротрещин в объеме деформируемого образца сопровождается возникновением акустических волн в широком спектре ча-

стот $\Delta f = 0,01 \div 10$ *МГц*, с широкой диаграммой направленности, который подробно описан в работе [3].

Теоретическое описание процесса распространения акустических волн в режиме образования микрополости удовлетворительно описывается по принципу Гюйгенса для упругих сред [3]. В случае мгновенного раскрытия полости с координатами вершин $L/2$ и $-L/2$ под действием внешних механических напряжений $\sigma(t) = \sigma_0 \theta(t)$, где $\theta(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда, удобно воспользоваться аппроксимацией функции $U_z^{(0)}(x,t)$, описывающей динамику раскрытия полости. При этом ширина главного лепестка диаграммы направленности акустического излучения $\Delta\theta_{l(t)} = 2\arcsin\left(2c_{l(t)} \big/ (\pi\omega L)\right)$ как продольных, так и поперечных волн при $L \approx 0,75$*мм* и $\nu = 3$ *МГц*, дает величину $\Delta\theta_l \approx 116°$, что позволяет считать распространение сигналов АЭ, сопровождающих локальную перестройку структуры материала, с учетом многократных отражений от границ внешней поверхности образца, равномерным по всем направлениям [3].

Акустические волны, являющиеся результатом перестройки кристаллической решетки и образования микродефекта, в виде непериодической последовательности несинусоидальных сигналов ультразвукового диапазона частот преобразуются датчиками ДАЭ-1 и ДАЭ-2 в электрические сигналы, которые после амплитудно-частотной селекции в электронных широкополосных усилителях УШ-1 и УШ-2 затем преобразуются в прямоугольные импульсы заданного уровня.

Так как образующийся микродефект расположен на различном расстоянии от датчиков ДАЭ, то акустические прямоугольные импульсы на выходе идентичных электронных каналах, которые являются результатом образования микродефекта, будут иметь задержку по времени $\Delta\tau$. Задержанные по времени прямоугольные импульсы обоих каналов последовательно запускают симметричные триггеры ТС1 и ТС2 (см. рис.3), которые преобразуют временной интервал задержки в прямоугольный импульс, длительность которого пропорциональна временному интервалу между импульсами. Затем прямоугольный импульс задержки с помощью RC- цепочки преобразуется в сигнал напряжения постоянного тока, величина которого прямо пропорциональна времени задержки акустических импульсов в идентичных электронных каналах.

Расчет положения микродефекта в исследуемом объекте по времени задержки акустического импульса осуществляется следующим образом. Пусть источник акустических сигналов, например микротрещины, расположен от датчиков ДАЭ 1и ДАЭ 2 на расстоянии ℓ_1 и ℓ_2, соответственно. Тогда общая длина образца ℓ_o между датчиками определится суммой:

$$\ell_o = \ell_1 + \ell_2, \quad (1)$$

где расстояния ℓ_1 и ℓ_2, от источника микродефекта до датчиков определятся произведением скорости акустических волн υ на время τ распространения акустического импульса в исследуемом образце:

$$\ell_1 = \upsilon \cdot \tau_1,\ \ell_2 = \upsilon \cdot \tau_2,\ \ell_o = \upsilon \cdot \tau_o. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$\upsilon \cdot \tau_o = \upsilon \cdot \tau_1 + \upsilon \cdot \tau_2, \text{ где } \tau_o = \tau_1 + \tau_2. \quad (3)$$

Из (2) находим:

$$\tau_1 = \frac{\ell_1}{\upsilon},\ \tau_2 = \frac{\ell_2}{\upsilon}. \quad (4)$$

Время задержки акустических импульсов определится разностью:

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1, \text{ или } \Delta\tau = \frac{\ell_2}{\upsilon} - \frac{\ell_1}{\upsilon} = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\upsilon}, \quad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно расстояния ℓ_1 от датчика ДАЭ-1 до микродефекта, получим:

$$\ell_1 = \ell_2 - \upsilon \cdot \Delta\tau, \text{ где } \ell_2 = \ell_o - \ell_1, \quad (6)$$

тогда

$$\ell_1 = \frac{1}{2}\left(\ell_o - \upsilon \cdot \Delta\tau\right), \text{ где } \upsilon = \ell_o / \tau_o. \quad (7)$$

После соответствующих преобразований, для положения микродефекта относительно первого датчика ℓ_1 в исследуемом образце, окончательно получим:

$$\ell_1 = \frac{\ell_o}{2}\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\tau_o}\right), \quad (8)$$

где значения параметров: $\tau_o = \ell_o / \upsilon$, ℓ_o, υ - являются постоянными величинами для данного исследуемого образца.

Относительная погрешность локализации микродефекта в исследуемом образце по формуле (8), как следует из расчетов, не превышает 3%.

Описанный выше акустический прибор может быть успешно использован для обнаружения и локализации микродефектной структуры различных деталей машин и конструкций в машиностроительной, автодорожной, авиационной и химической промышленности.

Библиографический список

1. Акустико-эмиссионная диагностика конструкций / А. Н. Серьезнов, Л. Н. Степанова и др. ; под ред. д.т.н., проф. Л. Н. Степановой. – Москва : Радио и связь, 2000. – 280 с.

2. Артемов, И. И. Прибор для исследования процесса образования и развития микротрещин на ранней стадии / И. И. Артемов, В. Д. Кревчик, А. В. Рудин // Новые промышленные технологии «Качество и надежность». – Вып. 1. – Заречный, 2010. – С. 38–46.

3. Артемов, И. И. Акустическая эмиссия в условиях скрытого» подрастания микротрещин / И. И. Артемов, В. Д. Кревчик // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4. – С. 92–95.

5. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

ПРИМЕНЕНИЕ СЕТЕЙ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д. А. Стенькин, В. И. Горбаченко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: stynukin@mail.ru; gorvi@mail.ru

Среди краевых задач математической физики различают прямые и обратные краевые задачи [1]. При решении прямых краевых задач необходимо найти решение уравнения с частными производными с заданными граничными и начальными условиями. Лишь некоторые модельные задачи удаётся решить аналитически. В большинстве случаев уравнения решаются численно методами конечных разностей и конечных элементов. Новым направлением в решении краевых задач является бессеточный метод, реализуемый на специфическом виде нейронных сетей – сетях радиальных базисных функций (СРБФ) [2–3]. Такой метод не требует построения сетки и позволяет получить приближенное дифференцируемое аналитическое решение в произвольных точках области.

В обратных задачах уравнение или его граничные, или начальные условия заданы частично. Для того, чтобы восстановить все компоненты используются некоторые известные дополнительные данные, полученные в результате каких-либо измерений в задачах реального мира [4]. Исходя из этого, можно классифицировать обратные задачи. В граничных обратных задачах необходимо восстановить граничные условия, в эволюционных обратных задачах необходимо восстановить начальные условия и в коэффициентных обратных задачах необходимо восстановить некоторые коэффициенты уравнения.

В [3] предложен быстрый алгоритм обучения СРБФ, основанный на методе доверительных областей и рассмотрено решение коэффициентной обратной задачи для уравнения Гельмгольца. В [5] для обучения СРБФ для решения краевых задач предложена адаптация метода Левенберга-Марквардта, соизмеримая по скорости обучения с методом доверительных областей, но более простая. Целью данной работы является разработка и исследование алгоритма обучения СРБФ методом Левенберга-Марквардта при решении коэффициентной обратной задачи для уравнения Гельмгольца.

В операторном виде коэффициентная обратная задача имеет вид [3]

$$L(k(\mathbf{x},u))u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$Bu(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где u – искомое решение; k – неизвестный коэффициент; L – дифференциальный оператор, зависящий от коэффициента; B – оператор граничных условий; Ω и $\partial\Omega$ – область решения граница области; f и p – известные функции.

Дополнительное условие задано в виде:

$$Du(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}),\ \mathbf{z} \in Z, \tag{3}$$

где D – оператор, задающий дополнительные условия; $Z \subset \Omega \cup \partial\Omega$ – множество точек задания дополнительного условия; ψ – известная функция.

В [3] применена параметрическая оптимизация [1] – неизвестный коэффициент представляется в параметрическом виде, параметры этого представления необходимо найти. Для параметрического представления искомого коэффициента в [3] предложено использовать СРБФ

$$k_{RBF}(\mathbf{x},u) = \sum_{m=1}^{M_k} w_m^k \varphi_m^k(\mathbf{x},u;\mathbf{p}_m^k), \tag{4}$$

где M_k – количество РБ-функций, w_m^k, $\mathbf{p}_m^k$ – веса и параметры РБФ, φ_m^k – РБФ, зависящая как от $\mathbf{x}$, так и от u.

Неизвестные параметры $\mathbf{p}_m^k$ и веса РБФ w_m^k выбираются из условия минимизации невязки между левой и правой частями (3)

$$J^k(\mathbf{w}^k,\mathbf{p}^k) = \sum_{s=1}^{S} \left[Du(\mathbf{z}_s) - \psi(\mathbf{z}_s) \right]^2, \tag{5}$$

где S – количество контрольных точек из Z, $\mathbf{w}^k = \left[w_1^k, w_2^k, .. w_{M_k}^k \right]$, $\mathbf{p}^k = \left[\mathbf{p}_1^k, \mathbf{p}_2^k, .. \mathbf{p}_{M_k}^k \right]$.

Итерационный процесс минимизации прекращается, когда перестает уменьшаться (5).

Неизвестная решение u прямой задачи (1)–(2), в которой $k = k_{RBF}$ аппроксимируется с помощью СРБФ $u_{RBF}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M_u} w_m^u \varphi(\mathbf{x};\mathbf{p}_m^u)$, где M_u – количество РБФ φ_m^u, w_m^u, $\mathbf{p}_m^u$ – веса и параметры РБФ.

Неизвестные параметры $\mathbf{p}_m^u$ и веса РБФ w_m^u можно найти, минимизировав функционал

$$J^u(\mathbf{w}^u,\mathbf{p}^u)=\sum_{i=1}^{N}\left[L(k_{RBF}(\mathbf{x}_i,u_{RBF}(\mathbf{x}_i)))u_{RBF}(\mathbf{x}_i)-f(\mathbf{x}_i)\right]^2+$$

$$+\lambda_B\sum_{i=N+1}^{N+K}\left[Bu_{RBF}(\mathbf{x}_i)-p(\mathbf{x}_i)\right]^2, \qquad (6)$$

где $\mathbf{w}^u=\left[w_1^u,w_2^u,..w_{M_u}^u\right]$, $\mathbf{p}^u=\left[\mathbf{p}_1^u,\mathbf{p}_2^u,..\mathbf{p}_{M_u}^u\right]$, λ_B – штрафной множитель за нарушение граничных условий (2).

Если ввести вектор $\boldsymbol{\theta}$ параметров СРБФ, составленный из весов и параметров РБФ, то коррекция этого вектора на шаге (итерации) k производится по формуле [5]:

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}=\boldsymbol{\theta}^{(k)}+\Delta\boldsymbol{\theta}^{(k+1)},$$

в которой вектор поправки параметров $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ находится из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\left(\mathbf{J}_{k-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{k-1}+\mu_k\mathbf{E}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}^{(k)}=-\mathbf{g}_{k-1}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{J}_{k-1}$ и $\mathbf{J}_k$ – матрицы Якоби, вычисленные в $k-1$ и k итерациях, $\mathbf{E}$ – единичная матрица, μ_k – параметр регуляризации, изменяющийся на каждом шаге обучения, $\mathbf{g}=\mathbf{J}^T\mathrm{e}$ – вектор градиента функционала по вектору параметров $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{e}$ – вектор невязок во внутренних и граничных пробных точках.

Матрица Якоби представляет собой матрицу производных вектора невязок $\mathbf{e}$ по элементам вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ и для СРБФ несложно вычисляется аналитически.

Рассмотрим решение коэффициентной обратной задачи на примере уравнения Гельмгольца [1]. Прямая задача для решаемого уравнения представлена следующим образом

$$-\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}+c(y)u(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Omega, \qquad (8)$$

$$u(x,y)=p(x,y), \quad (x,y)\in\partial\Omega, \qquad (9)$$

где Ω – расчетная область; $\partial\Omega$ – граница расчетной области; $c=10y$, $p=1+x$.

Расчётной областью является квадрат 1×1.

Дополнительное условие имеет вид

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial \mathbf{n}} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega, \tag{10}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя по отношению к границе Ω нормаль.

В реальной задаче значения $\psi(x,y)$ получаются с некоторой погрешностью в результате измерений на границе Ω. В модельной задаче эти значения вычислялись по результатам решения прямой задачи (8) с известным коэффициентом $c = 10y$. Прямая задача решалась на СРБФ. Использование для обучения сети метода градиентного спуска показало очень низкую скорость сходимости. Исследовано применение для обучения сети метода Левенберга - Марквардта. Однако при использовании метода Левенберга – Марквардта матрица системы (7) быстро приближается к диагональной матрице с очень большими диагональными элементами. В результате вектор поправки практически равен нулю и сеть плохо обучается.

Для преодоления этого недостатка уравнение (8) рассмотрено как уравнение Пуассона с нелинейной правой частью. Уравнение решалось итерационным методом $\Delta u^{(n+1)} = c\left(u^{(n)}\right) \cdot u^{(n)}$, где Δu – Лапласиан, n – номер итерации по нелинейности. На каждой итерации по нелинейности задача решалась на СРБФ методом Левенберга-Марквардта.

График численного решения с точным коэффициентом показан на рис. 1.

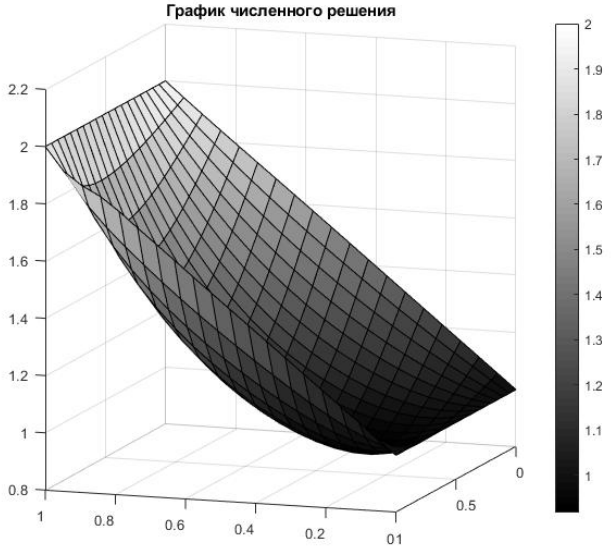


Рис. 1. График численного решения с точным коэффициентом

Точки задания дополнительных условий располагались случайно на границе области. Дифференцируемость решения прямой задачи, полученного на RBF-сети, позволяет вычислить нормальные производные

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sin\alpha \left(-\sum_{k=1}^{n_{RBF}} \frac{w_k}{a_k^2} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_k\|^2}{a_k^2}} \cdot (x_1 - c_{k1}) \right) +$$

$$+\cos\alpha \left(-\sum_{k=1}^{n_{RBF}} \frac{w_k}{a_k^2} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_k\|^2}{a_k^2}} \cdot (x_2 - c_{k2}) \right), \qquad (11)$$

где α – угол между направлением нормали и осью абсцисс, $\mathbf{x}$ – вектор координат точки задания дополнительных условий, x_1, x_2, c_{k1} и c_{k2} – координаты точки задания дополнительных условий и РБФ.

Предложенный подход не позволяет напрямую минимизировать функционал (5). Предлагается следующий алгоритм:

Инициализация сетей и коэффициента c

while $J^{(n)} > \varepsilon$ **do**

Решение прямой задачи $\Delta u^{(n)} = c^{(n-1)} u^{(n-1)}$

Расчет дополнительных условий

Одна итерация пересчета коэффициента

end while

Алгоритм реализует минимизацию функционала (5) до точности, определяемой точностью измерения дополнительных условий в реальной задаче. Тем самым реализуется итерационная регуляризация. Решение прямой задачи – уравнения Пуассона с нелинейной правой частью производится на СРБФ методом Левенберга – Марквардта. Одна итерация пересчета коэффициента производится на другой сети методом градиентного спуска. Градиент функционала (5) по параметрам этой сети вычисляется путем численного дифференцирования, так как аналитическое выражение зависимости (5) от параметров этой сети отсутствует.

Решение прямой задачи проводилось методом Левенберга - Марквардта. Значение функционала ошибки, равное 0.0001, достигается в среднем за 58 итераций.

Для пересчета приближения к искомому коэффициенту (4) использовалась СРБФ с числом нейронов $nRBFc = 10$. В качестве РБФ использовались функции Гаусса. В процессе обучения сети минимизировался функционал ошибки (5), в котором $Du(\mathbf{z}_s)$ и $\psi^{\delta}(\mathbf{z}_s)$ вычисляются аналитически по (11). Градиент функционала (5) вычислялся с использованием численного дифференцирования решения прямой задачи в точках задания дополнительных условий.

Функционал (5) практически перестал изменяться после 775 итераций. При этом достигнута средняя квадратическая погрешность восстановленного коэффициента относительно точного значения

$$\varepsilon^c = \sqrt{\sum_{i=1}^{S}(c_{RBF,i} - c_i)^2} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{S} c_i^2} = 0{,}005,$$

где S – количество точек задания дополнительных условий, $c_{RBF,i}$ – значение восстановленного коэффициента, c_i – точное значение коэффициента, i – номер точки задания дополнительных условий.

График сравнения точного коэффициента и коэффициента, полученного на СРБФ показан на рис. 2. Графики близки.

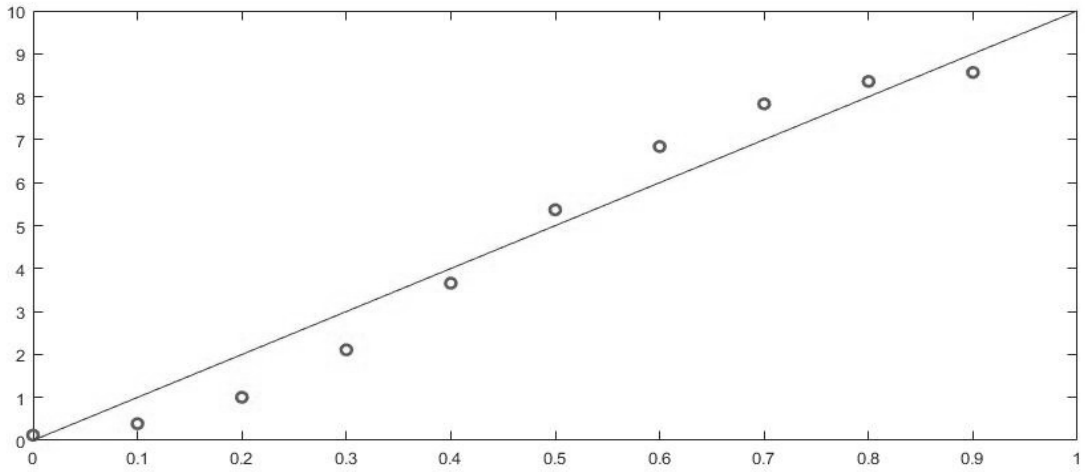


Рис. 2. Сравнение коэффициентов, полученный на сети с точным значением

График численного решения с коэффициентом, полученным после решения обратной задачи, практически не отличается от графика решения с точным коэффициентом.

Библиографический список

1. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.

2. Yadav, N. An Introduction to Neural Network Methods for Dif-ferential Equations / N. Yadav, A. Yadav, M. Kumar. – Springer, 2015. – 115 p.

3. Горбаченко, В. И. Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций / В. И. Горбаченко, М. В. Жуков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 1. – С. 133–143.

4. Aster, R. A. Parameter estimation and inverse problems / R. A. Aster, B. Borchers, C. H. Thurber. – Elsevier, 2013. – 356 p.

5. Горбаченко, В. И. Обучение сетей радиальных базисных функций методом Левенберга – Марквардта при решении краевых задач / В. И. Горбаченко // Нейрокомпьютеры и их применение : тезисы докладов XVII Всерос. науч. конф. – Москва : МГППУ, 2019. – С. 324–326.

ПОСТРОЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ КОДОВ ДЛИНОЙ 256 БИТ К «БЕЛОМУ» ШУМУ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СВЕРТОК ХЭММИНГА ПО МОДУЛЮ ДВА

А. А. Козинова, Д. В. Тарасов, А. П. Юнин*

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия;
* Пензенский научно-исследовательский
электротехнический институт, г. Пенза, Россия
E-mail: akozinowa@yandex.ru; tarasovdv@mail.ru; alexey_82@mail.ru

Прикладные задачи защиты персональной информации, как правило, предъявляют ряд требований к формируемым ключам (паролям) и использованию криптографических функций. Но, в любом случае, формируемый ключ должен быть подвергнут проверке на его качество. Так, даже «хороший» пароль к обычному интернет-аккаунту должен быть трудноподбираемым (он должен быть достаточно длинным и содержать символы разных типов; обязан быть не подбираемым по словарю и словарю с комбинациями).

Самым простым способом проверки качества ключа является вычисление его энтропии по Шеннону. Например, для вычисления энтропии пары разрядов тестируемого ключа

$$H("x_1, x_2") = -\sum_{i=1}^{2^2} P_i \cdot \log_2(P_i) \qquad (1)$$

(где P_i – вероятность появления одного из 2^2 состояний кода) потребуется выборка порядка $2^{2+7} = 2^9$ примеров, если допустима ошибка оценки вероятности событий $\Delta P_i \approx 2^{-7}$.

Если воспользоваться рекомендациями ГОСТ Р 52633.3 [1], то проблема вычислительной сложности для кодов длинной 256 бит при оценке энтропии по Шеннону может быть решена путем перехода от обычного представления кодов к вычислению расстояний Хэмминга по модулю два:

$$h_2 = 256 - \sum_{i=1}^{256} ("x_i") \oplus ("T_i"), \qquad (2)$$

где $\oplus$ – операция сложения по модулю два; $"x_i"$ – разряды эталонной последовательности; $"T_i"$ – разряды тестовой последовательности длиной 256 бит.

На первом этапе нашей работы были построены распределения Хэмминга по модулю два (всего 257 значений расстояний) для разного рода эталонных и тестовых последовательностей, а также были определены их числовые характеристики.

Сначала в качестве эталонных последовательностей «не белого» шума нами были выбраны случайно сгенерированные последовательности двоичных чисел длины 10000 бит. Каждый из фрагментов этой последовательности «накрывался» гаммой тестовой последовательности в пространстве сверток Хэмминга по модулю два. В нашей работе в качестве тестовой последовательности, мы использовали осмысленные фразы русского языка в 8-битной ASCII кодировке и случайные значения, полученных от 256 мерного генератора «белого» шума. Подобным образом были проанализированы результаты для случая, когда в качестве эталонной последовательности «не белого» шума был выбран некоторый осмысленный русскоязычный текст (который представляет собой набор двоичных кодов в кодировке ASCII) [2]. Числовые характеристики (математическое ожидание $E(h)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(h)$, мода $M_0(h)$), построенных распределений Хэмминга, представлены в табл. 1.

Таблица 1

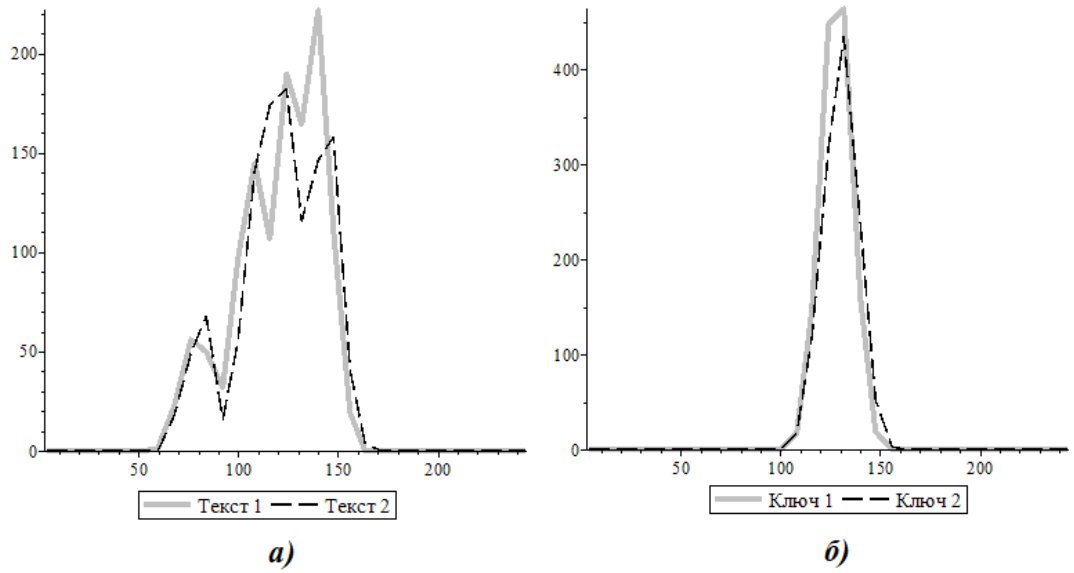
		Эталонная последовательность длины 10000 бит	
		случайно сгенерированная последовательность	осмысленная фраза русского языка в 8-битной ASCII кодировке
Тестовая последовательность длины 256 бит	случайно сгенерированная последовательность (ключ)	$E(h)=128,006$, $\sigma(h)=7,962244$, $M_0(h)=128$	$E(h)=129,144$, $\sigma(h)=8,52832$, $M_0(h)=132$
	осмысленная фраза русского языка в 8-битной ASCII кодировке (текст)	$E(h)=127,971$, $\sigma(h)=8,13269$, $M_0(h)=130$	$E(h)=120,018$, $\sigma(h)=21,7234$, несколько мод: $M_0(h)=109$, $M_0(h)=128$, $M_0(h)=144$

Примечание. Для ключа с почти независимыми разрядами множество сверток Хэмминга с фрагментами «не белого» шума должно дать следующие статистические моменты $E(h)=128$, $\sigma(h)=8$ [3].

Стоит отметить, что наличие мультимодальности распределения (см. табл. 1) также указывает на снижение криптографических свойств синтезированного ключа и может быть учтено при формировании оценки

качества «белого» шума. Поэтому дальнейшие исследования были построены для случая эталонной последовательности длины 10000 бит, заданной как осмысленная фраза русского языка в 8-битной ASCII кодировке.

Для того чтобы получить более точную картинку распределений, был применен усредняющий фильтр для устранения шумов. Так на рис. 1,***а*** показаны распределения для двух разных кодов, представляющих собой осмысленную фразу на русском языке в кодировке ASCII, а на рис. 1,***б***, распределения для двух ключей, созданным с помощью генератора случайных чисел.



а) ***б)***

Рис. 1. Распределения расстояний Хэмминга вычисленных по модулю два

После анализа рисунков, авторами было принято решение взять отрезок, на котором наблюдается появление ненулевых значений сверток Хэмминга для текста, и разбить этот отрезок на пять частей. На каждом отрезке было посчитано математическое ожидание $E_i(h),\ i=1,...,5$, а также определено математическое ожидание $E(h)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(h)$ на всем отрезке. Таким образом, в результате получили семь элементов, которые будут являться входными нейронами, образующими вход искусственной нейронной сети [4].

В качестве данных для обучения, было взято десять различных текстов на русском языке и ключей, сформированных случайным образом (табл. 2).

Далее в среде Statistica была построена искусственная нейронная сеть по линейной разделимости случайных ключей от осмысленных. Среди множества различный типов сетей была выбрана сеть MLP 7-8-2, архитектура которой представлена на рис.2. Наш выбор был остановлен на сети MLP 7-8-2, так как процент «успеха» обучающего множества равен 100 %, процент «успеха» тестового множества и контрольного множества также равен 100 % (рис. 3).

Таблица 2

	$E_1(h)$	$E_2(h)$	$E_3(h)$	$E_4(h)$	$E_5(h)$	$\sigma(h)$	$E(h)$
Text1	20	11,4036	13,2101	9,75464	3,87935	18,6571	118,309
Text2	20,6269	10,8458	14,8379	9,07154	2,32331	16,8519	117,741
Text3	20,0909	9,55458	13,6891	11,1736	4,61139	21,5411	121,447
Text4	20,1493	10,5039	12,9869	10,6189	3,76396	19,8435	119,162
Text5	19,6444	10,3437	11,9112	11,5538	3,62921	21,7234	120,018
Text6	19,3245	12,0101	12,2912	11,1245	5,45214	24,0521	122,585
Text7	20,0412	10,0282	14,172	9,96415	3,19537	18,9302	118,6
Text8	19,8715	10,1112	12,5976	11,8848	4,37327	22,0756	122,3
Text9	20,381	12,8501	12,5376	12,5853	3,99152	22,173	120,585
Text10	20,0345	9,77922	14,4798	10,7075	3,68284	19,2655	120,583
Key1	0	0	18,7495	9,77996	1,65161	7,92764	129,711
Key2	0	0	19,2088	10,199	2,61864	8,66663	130,284
Key3	0	0	18,4236	9,71632	2,11917	8,52832	129,144
Key4	0	23	18,7015	8,96966	1,84762	8,07594	128,278
Key5	0	20	19,4254	8,61824	2,01852	7,64209	128,284
Key6	0	0	19,6431	7,13303	0,875	6,65867	126,572
Key7	0	0	19,7407	9,79248	2,10145	7,72196	130,282
Key8	0	0	19,6028	6,88074	1,66667	6,56531	126,296
Key9	0	0	19,9764	8,18262	2,175	6,80563	128,292
Key10	0	0	19,329	8,4104	2,23913	7,56183	127,996

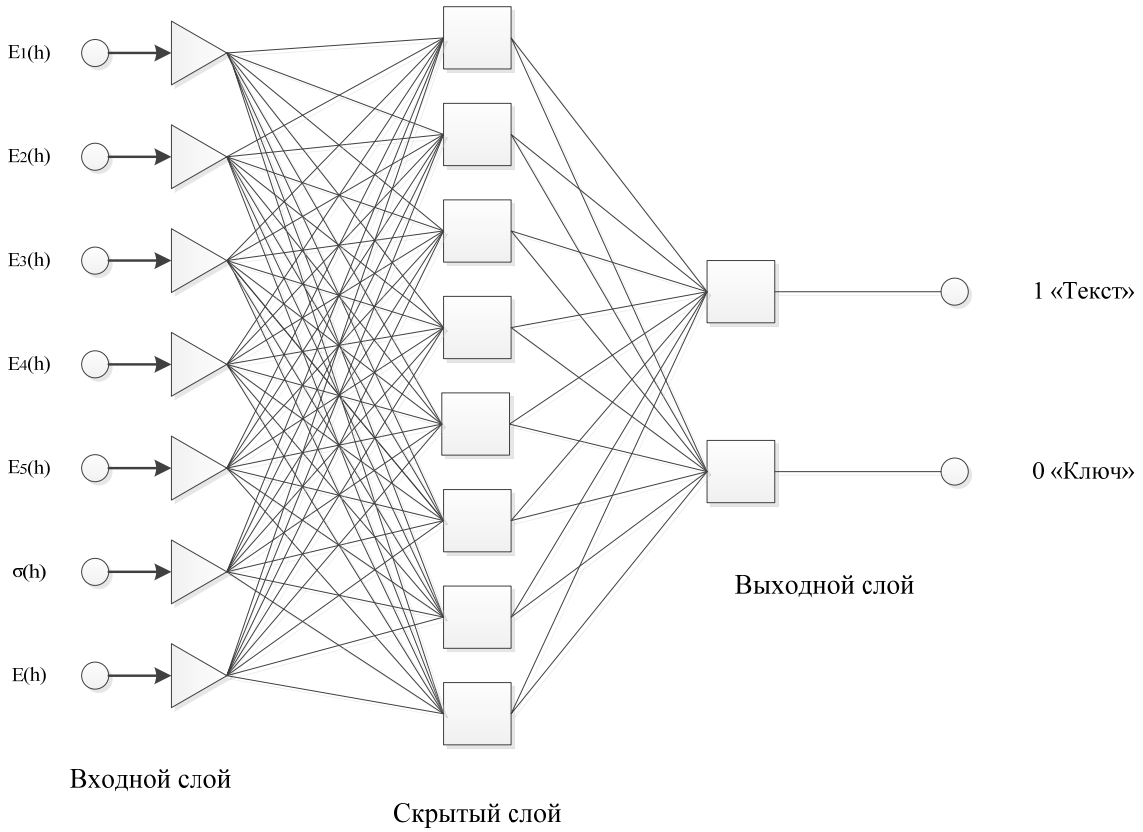


Рис. 2. Архитектура нейронной сети

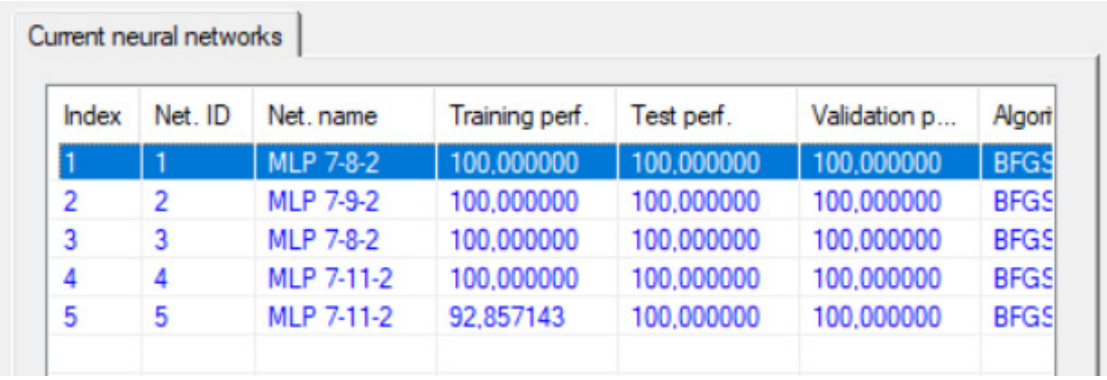


Рис. 3

Итогом выполнения кода соответствующей нейронной сети являются значения 1 (текст) или 0 (ключ).

Результаты работы искусственной нейронной сети затем были проверены на 200 других тестовых данных: половина из которых, определяла текстовую последовательность (осмысленную фразу на русском языке), а другая половина – ключ, сгенерированный случайным образом. Во всех случаях нейронная сеть выдавала правильный результат относительно типа тестовой последовательности.

Таким образом, искусственная нейронная сеть, построенная по распределению сверсток Хэмминга по модулю два, позволяет определить, чем представлен код длины 256 бит, текстом или случайным ключом. Такие тесты можно провести и для сверсток по другим модулям.

Библиографический список

1. ГОСТ Р 52633.3–2011. Защита информации. Техника защиты информации. Тестирование стойкости средств высоконадежной биометрической защиты к атакам подбора. – Москва, 2011.

2. Козинова, А. А. Учет мультимодальности распределений расстояний Хэмминга при оценке близости длинных кодов к «белому» шуму / А. А. Козинова, Д. В. Тарасов, А. П. Юнин // Информационные технологии в науке и образовании. Проблемы и перспективы : сб. науч. ст. Всерос. межвуз. науч.-практ. конф. (г. Пенза, 13 марта 2019 г.) / под ред. Л. Р. Фионовой. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2019. – С. 105–108.

3. Юнин, А. П. Оценка качества «белого» шума: реализация теста «стаи обезьян» через множество свёрток Хэмминга, построенных для разных систем счисления / А. П. Юнин, А. И. Иванов // Информационно-управляющие и телекоммуникационные системы специального назначения : Всерос. науч.-техн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения одного из основоположников советской вычислительной техники Б. И. Рамеева. Секция 4 «Биометрическая поддержка криптовалют, блокчейн реестров, облачных сервисов» (16 мая 2018 г.). – Пенза : Технопарк РАМЕЕВ, 2018.

4. Иванов, А. И. Автоматическое обучение больших искусственных нейронных сетей в биометрических приложениях : учеб. пособие / А. И. Иванов. – Пенза, 2013. – 30 с. – URL: http://пниэи.рф/activity/science/noc/tm_IvanovAI.pdf

ПОСТРОЕНИЕ 3D-МОДЕЛЕЙ ПРИ ПОМОЩИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

К. А. Краснухина, Ю. Ф. Захарова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: olegzakharov@rambler.ru

В последнее время нейросеть является распространенным инструментом решения нестандартных задач. Существует довольно много разновидностей нейросетей, но будет ли классическая нейросеть достаточно эффективна в решении данной задачи? Распознавание объектов на изображениях дает широкие возможности для реализации аналитических методов.

Наиболее удачной нейносетью для данной задачи является сетчатые нейросети, идея которые заключается в наличии полносвязных слоев на выходе, чередовании сверточных слоев, субдискретизирующих слоев.

На один нейрон попадает не целое изображение, а только его фрагмент, что позволяет увидеть топологию между слоями. Также используется относительно небольшой объем весов, которые применяются ко всему изображению, что положительно сказывается на качестве распознавания. Распознавание будет строиться на основе двумерных фильтров. Фильтр – заданная вручную матрица коэффициентов. Каждый фрагмент умножается на ядро поэлементно, затем суммируется и записывается в аналогичную позицию нового изображения. Таким образом, данная манипуляция дает нам новое изображение, на котором каждый пиксель означает степень похожести. Другими словами мы получаем карту признаков. Визуально этот процесс представлен на рис. 1.

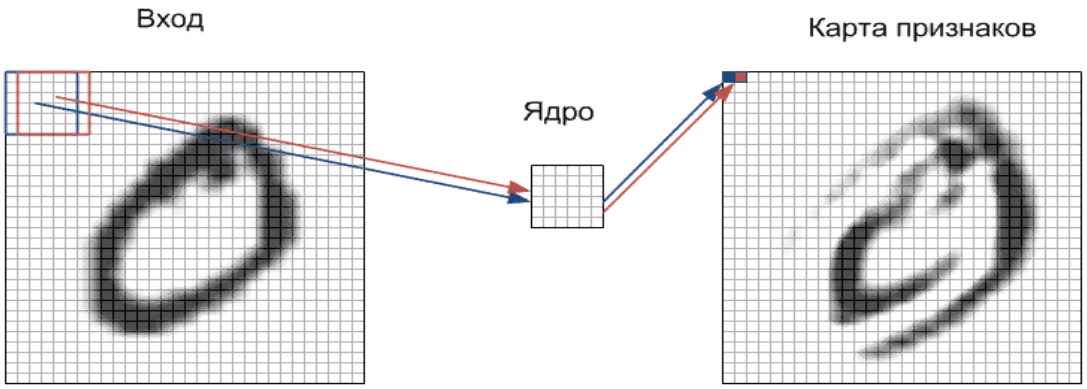


Рис. 1. Процесс свертки

Одной из особенностей данной сети является уменьшение изображения, поэтому используют субдискретизацию для обеспечения инвари-

антности к масштабу. Чередование слоев карт признаков дает возможность распознавания сложных иерархических признаков. После прохождения нескольких слоев карта вырождается в вектор, но может быть и тангенциальная функция.

Для определения качества распознавания будем использовать функцию среднеквадратической ошибки:

$$E^p = \frac{1}{2}\left(D^p - 0\left(I^p, W\right)\right)^2 \quad (1)$$

E^p – ошибка распознавания для $p-ой$ обучающей пары, D^p – желаемый выход сети, $0\left(I^p, W\right)$ – выход сети, зависящий от $p-ого$ входа и весовых коэффициентов W.

Необходимо задать веса так, чтобы для любой пары $\left(I^p, D^p\right)$ ошибка E^p была минимальна. За E обозначим среднее арифметическое ошибок всех пар.

Для минимизации ошибки E^p используется градиентный метод Для одномерного случая разложение в ряд Тейлора функции ошибки E^p будет иметь вид:

$$E(W) = E(W_c) + (W - W_c)\frac{\partial E(W_c)}{\partial W} + \frac{1}{2}(W - W_c)^2 \frac{\partial^2 E(W_c)}{\partial W^2} + \ldots \quad (2)$$

где E – функция ошибки, W_c – некоторое начальное значение веса. Возьмем производную функции ошибки по весам, отбросив члены выше 2го порядка:

$$\frac{\partial E(W)}{\partial W} = \frac{\partial E(W_c)}{\partial W} + (W - W_c)\frac{\partial^2 E(W_c)}{\partial W^2} \quad (3)$$

Из этого выражения следует, что вес, при котором значение функции ошибки будет минимальным можно вычислить:

$$W_{\min} = W_c - \left(\frac{\partial^2 E(W_c)}{\partial W^2}\right)^{-1} \frac{\partial E(W_c)}{\partial W}. \quad (4)$$

Оптимальный вес вычисляется как текущий минус производная функции ошибки по весу, деленная на вторую производную функции ошибки. Для многомерного случая идентично. Представленные формулы позволяют легко вычислить производную ошибки по весам, находящимся в выходном слое. Вычислить ошибку в скрытых слоях позволяет широко известный метод обратного распространения ошибки. Обучение нейросети начинается с цифр. Каждую цифру записываем и проверяем.

Из 10 000 попыток распознавания чисел нейросеть допустила 74 ошибки. Результаты представлены на рис. 2.

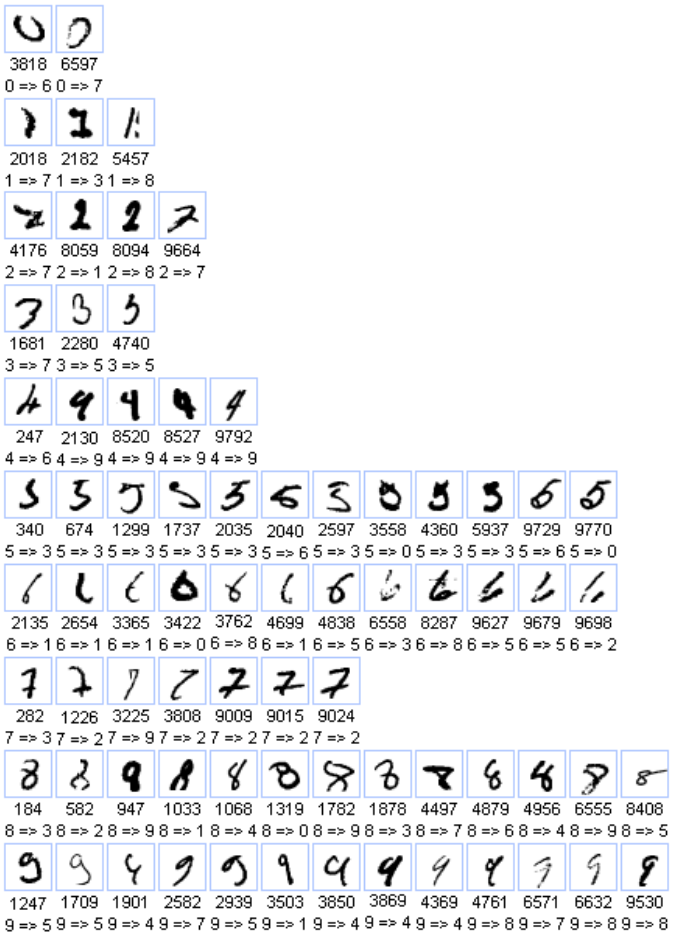


Рис. 2. Ошибки, допущенные нейросетью при распознавание чисел

Встречаются ошибки, которые тяжелы в распознавание, например, число под номером 4360 одновременно похоже на 3 и 5. Но шибки, допущенные при распознавание чисел можно исправить большим числом тренировок.

В ходе исследований сверточными нейросетями результат ошибок распознавания составляет 0.39%.

В дальнейшем данный метод распознавания будет адаптироваться под задачи 3D моделирования отдельных объектов, а может даже и лиц. Аналогичные методы построения 3D моделирования широко используются, наиболее известные 2D наложение, 3D реконструкция и редактирование лиц. Нейросеть при этом принимает на вход изображение и кодирует его в вектора текстуры, альбедо и освещения. Закодированные скрытые вектора для альбедо и текстуры декодируются с использованием двух декодеров, в качестве которых используются свёрточные нейросети. На выходе декодеры выдают блики лица, его альбедо и 3D текстуру лица. С использованием этих параметров, дифференцируемый

рендеринг-слой генерирует модель лица посредством совмещения 3D текстуры, альбедо, освещения и параметров расположения камеры, полученных энкодером.

Однако, сегментация 3D-модели– непростая задача сама по себе. Даже если сегментация задана предварительно, сложно с точностью определить места стыковки, симметрию и параллелизм в деталях изображения. Сложностей несколько:

1) соотношения сторон на 2D-изображениях определяются с трудом. Зато хорошо видна геометрия объекта. В отличие с преобразованием пикселей в воксели, восстановление структуры элементов по пикселям–некорректная задача.

2) 3DCAD-модели, созданные человеком, часто содержат несходные подструктуры. Восстановление таких 3D-моделей без предварительной сегментации - очень непростая задача.

3) объекты сильно различаются по текстуре, условиям освещения и фону.

Именно поэтому обучать и интегрировать необходимо одновременно две сети:

1) Structure masking network (SMN), которая создает маску объекта по входному 2D-изображению в разных масштабах. Это многослойная сверточная нейросеть (CNN). Её задача сохранить информацию о форме, пока просматривается нерелевантная информация: фон и текстуры.

2) Structure recovery network (SRN), которая рекурсивно восстанавливает иерархию деталей объекта в виде кубоидной структуры. SRN получает входные данные из SMN, добавляет CNN-характеристики 2D-изображения и затем передает эти функции в рекурсивную нейронную сеть (RvNN) для декодирования в 3D-структуру. На выходе будет получено изображение в виде трехмерных кубоидов с правдоподобной пространственной конфигурацией.

Эти две сети обучаются совместно. Набор данных для обучения включает контурные маски и кубоидные структуры, которые создаются путем рендеринга 3D-CAD-моделей.

Библиографический список

1. Галушкин, А. И. Синтез многослойных систем распознавания образов / А. И. Галушкин. – Москва : Энергия, 1974.

2. Миркес, Е. М. Логически прозрачные нейронные сети и производство явных знаний из данных / Е. М. Миркес // Нейроинформатика. – Новосибирск : Наука. Сибир. предприятие РАН, 1998. – 296 с.

3. Чернодуб, А. Н. Обзор методов нейроуправления / А. Н. Чернодуб, Д. А. Дзюба // Проблемы программирования. – 2011. – № 2. – С. 79–94.

4. Якубенко, А. Построение трехмерных моделей зданий по фотографиям для систем виртуальной реальности / А. Якубенко // Программные системы и инструменты. – Москва, 2012. – Т. 13.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

П. В. Морозов

E-mail: pavelvladimirmorozov@gmail.com

Задачу приближенного построения изображения с высоким разрешением (high-resolution – HR) на основе его аналога с низким разрешением (low-resolution – LR) обычно называют super-resolution (SR). Данная задача является важной для широкого класса практических приложений, таких как обработка и анализ медицинских изображений, аэрокосмических снимков, данных видеонаблюдения, трансляция видеопотока низкого разрешения на современных широкоформатных дисплеях и ряда других задач [1]. Рассматриваемая задача не является новой и существует достаточно большое количество классических подходов к ее решению [2], которые начали разрабатываться практически с самого появления цифровых изображений и цифровой техники. Качественный скачек в этой области произошел в связи с развитием машинного обучения и, в частности, нейронных сетей. Данная задача на данный момент остается актуальной и нейронные сети показывают лучшие результаты ее решения, а использование различных новых эвристик в построении и обучении нейронных сетей позволяют продолжать улучшать результаты.

Задача ставится следующим образом, требуется на основе изображения низкого разрешения I^{LR} построить приближенное изображение I^{SR} максимально близкое к исходному изображению высокого разрешения I^{HR}. I^{LR} в данном случае будет описываться тензором размером $W \times H \times C$, а I^{SR} и I^{HR} тензорами размером $rW \times rH \times C$, где W – высота изображения в пикселях, H – ширина, C – количество цветовых каналов и r – коэффициент масштабирования. Близость I^{SR} и I^{HR} можно понимать в смысле среднеквадратичного отклонения (mean squared error – MSE), но данный подход не является лучшим выбором для изображений, о чем будет сказано далее. В данном случае рассматривается класс SR методов, использующих только одно исходное изображение.

В статье дается краткий обзор по применению нейронных сетей к вопросам приближенного восстановления изображений.

Качественный скачек в решении задачи улучшения качества изображения произошел вместе с появлением новой архитектуры нейронных сетей (convolutional neural network – CNN) впервые предложенной в [3]. Было показано, что более глубокие сетевые архитектуры могут быть обучаемы и существенно повышают точность сети т.к. позволяют моделировать отображения очень высокой сложности.

Ключевой составляющей CNN является сверточный слой (convolutional layer), который строит отображение I^* (называемое картой признаков) исходного тензора I с помощью заданного фильтра K, по следующему правилу:

$$I^*_{w,h,c} = K * I_{w,h,c} = \sum_{s=-s'}^{s'} \sum_{t=-t'}^{t'} \sum_{p=-p'}^{p'} K_{s,t,p} \cdot I_{w-s,h-t,c-p}$$

В отличии от линейных (полносвязных) слоев, которые работают с векторными представлениями объектов, сверточные слои предназначены для работы с тензорными представлениями, благодаря чему не теряется информация о первоначальной структуре объекта, что очень важно при работе с изображениями. Это позволяет извлекать более высокоуровневую информацию об объектах, при этом количество обучаемых весов в слое значительно уменьшается, что позволят строить и обучать более глубоки архитектуры.

Развитие данной идеи привело к появлению таких сетей как VGG [4], в которой было предложено заменять большие фильтры сверточных слоев каскадом фильтров размером 3×3, что дало выигрыш в качестве сети и скорости ее обучения. И ResNet (residual network) [5], основная идея которого состоит в введении остаточных блоков (residual blocks) и пропуска соединений (skip connections), позволяющие обучать очень глубокие сети.

Дальнейшее развитие SR алгоритмов связано с появлением генеративных состязательных сетей (generative adversarial networks – GAN), впервые предложенных в [6]. GAN обеспечивают мощную основу для создания изображений с высоким качеством восприятия и на данный момент являются единственным способом генерации фотореалистичных изображений.

Данная архитектура представлена двумя параллельно обучающимися нейронными сетями: одна нейронная сеть, называемая генератором, генерирует новые экземпляры данных, а другая – дискриминатор решает, относится ли каждый экземпляр данных, который он рассматривает, к набору обучающих данных или нет. Между тем, генератор передает дискриминатору сгенерированные изображения. Он делает это в надежде, что они будут приняты подлинными, хотя таковыми не являются. Цель дискриминатора состоит в том, чтобы не пропустить «поддельные» изображения. Цель генератора – генерировать изображения, которые будут пропущены дискриминатором. При этом каждая из этих сетей постоянно обучается. Чтобы обучить распределение генератора $p_G(z)$ на данных $x \sim p_D(x)$ введем априорное шумовое распределение $z \sim p_z(z)$, а затем представим отображение в пространство данных как $G_{\theta_G}(z)$, где G_{θ_G} – дифференцируемая функция, представленная

нейронной сетью с параметрами θ_G. Также определим вторую нейронную сеть $D_{\theta_G}(x)$, которая возвращает один скаляр. Обозначим $D_{\theta_D}(x)$ – вероятность того, что x пришел из данных, а не из p_G. Обучение D_{θ_D} будет происходить таким образом, чтобы максимизировать вероятность назначения правильной метки для учебных примеров и образцов от G_{θ_G}. Одновременно с этим будет происходить обучение G_{θ_G}, таким образом, чтобы минимизировать $\log(1 - D_{\theta_D}(G_{\theta_G}(z)))$:

Другими словами, D_{θ_D} и G_{θ_G} играют в следующую минимаксную игру со значением функции $V(G_{\theta_G}, D_{\theta_D})$:

$$\min_{G_{\theta_G}} \max_{D_{\theta_D}} V(D_{\theta_D}, G_{\theta_G}) = \mathbb{E}_{x \sim p_D(x)}\left[\log D_{\theta_D}(x)\right] +$$

$$+\mathbb{E}_{x \sim p_z(z)}\left[\log\left(1 - D_D\left(G_{\theta_G}(z)\right)\right)\right]$$

В работе [7], на результаты которой во многом опирается данная статья, предлагается построение SR на основе генеративной состязательной сети (SRGAN), для которой используется глубокая остаточная сеть ResNet [5] с пропуском соединения. Полная архитектура сети представлена на рис. 1.

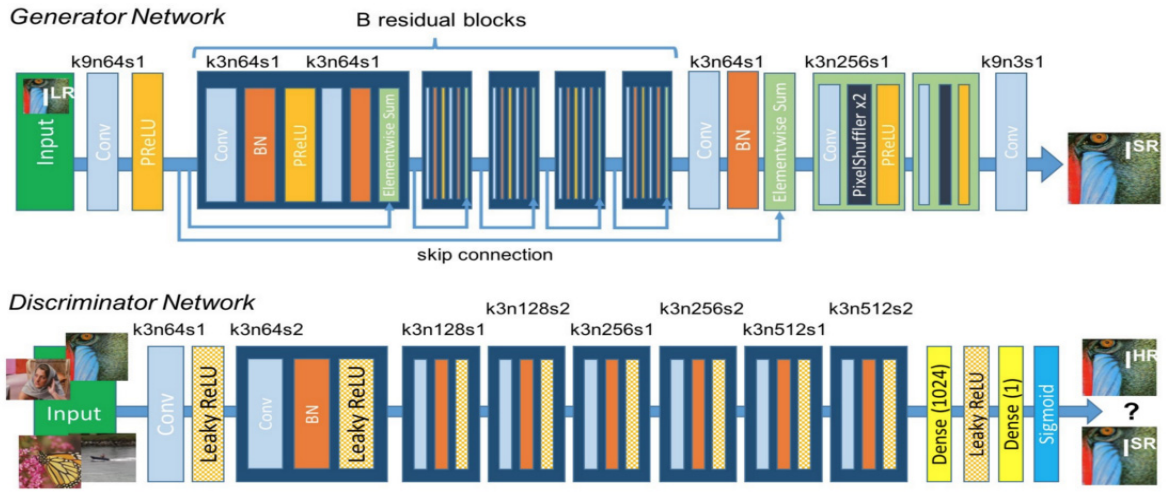


Рис. 1. Развернутая архитектура SRGAN

Определение функции потерь l^{SR} имеет решающее значение для качества генераторной сети. Целью оптимизации алгоритмов SR обычно является минимизация среднеквадратичной ошибки (mean squared error – MSE) между восстановленным изображением I^{SR} и оригинальным изображением высокого качества I^{HR}:

$$l_{MSE}^{SR} = \frac{1}{r^2 WH} \sum_{w=1}^{rW} \sum_{h=1}^{rH} \left(I_{w,h}^{HR} - G_{\theta_G} \left(I^{LR} \right)_{w,h} \right)^2 .$$

Однако способность MSE улавливать различия, важные для восприятия человеком, очень ограничена, поскольку они определяются на основе различий изображения по пикселям. Минимизация MSE поощряет поиск средне-пиксельных правдоподобий, которые обычно чрезмерно гладкие и, следовательно, имеют низкое качество восприятия [7]. В данном случае это выражается в эффекте «замыливания» восстановленного изображения. Разница в восприятии между SR и оригинальным изображением означает, что восстановленные изображения не фотореалистичны. В [8] авторы решают данную проблему путем введения новой функции потерь, которую они формулируют на основе евклидова расстояния между признаками, извлеченными из сети промежуточных слоев VGG19 [4]. Показано, что предложенная функция потерь позволяет визуально улучшить генерацию изображения.

В работе [7] развивается подход, предложенный в [8] и строится функция потерь, которая оценивает выход сети в отношении характеристик, важных для восприятия. Потеря качества восприятия в данном случае формируется как взвешенная сумма потери качества выходного изображения l_X^{SR} и потери качества от состязательной составляющей l_{Gen}^{SR}:

$$l^{SR} = l_X^{SR} + 10^{-3}\, l_{Gen}^{SR}$$

Для оценки потерь качества выходного изображения введем функцию потерь на основе слоев активации ReLU (линейный выпрямитель), предварительно обученной 19-слойной сети VGG, описанной в [4]. Через $\phi_{i,j}$ обозначим карты признаков, полученные на j-ом сверточном слое (после активации) перед i-м слоем подвыборки на основе максимальных значениях (maxpooling) в сети VGG19, которая считается заданной. Определим функцию потерь $l_{VGG/i,j}^{SR}$ как евклидово расстояние между представлениями признаков восстановленного изображения $G_{\theta_G}(I^{LR})$ и эталонного изображения I^{HR}:

$$l_{VGG/i,j}^{SR} = \frac{1}{W_{i,j} H_{i,j}} \sum_{w=1}^{W_{i,j}} \sum_{h=1}^{H_{i,j}} \left(\phi_{i,j} \left(I^{HR} \right)_{w,h} - \phi_{i,j} \left(G_{\theta_G} \left(I^{LR} \right) \right)_{w,h} \right)^2 ,$$

где $W_{i,j}$ и $H_{i,j}$ описывают размеры соответствующих карт признаков в сети VGG.

К выше описанным потерям качества выходного изображения, также добавляется потеря от состязательной составляющей GAN. Это

поощряет сеть производить решения, которые максимально приближены к естественным изображениям, что позволяет «обмануть» сеть-дискриминатор. Потеря от состязательной составляющей l_{Gen}^{SR} определяется на основе вероятностей дискриминатора $D_{\theta_G}(G_{\theta_G}\left(I^{LR}\right))$ для всех обучающих выборок как:

$$l_{Gen}^{SR} = \sum_{n=1}^{N} -\log\left(D_{\theta_G}\left(G_{\theta_G}\left(I^{LR}\right)\right)\right),$$

Для более стабильного поведения градиента будем минимизируем $-\log\left(D_{\theta_G}\left(G_{\theta_G}\left(I^{LR}\right)\right)\right)$ вместо $\log\left(1-D_{\theta_G}\left(G_{\theta_G}\left(I^{LR}\right)\right)\right)$ [8].

Предложенная архитектура с описанной функцией потерь позволяет получать изображения близкие в смысле восприятия при достаточно большом коэффициенте масштабирования. Сравнение восстановленных изображений с помощью бикубической интерполяции и SRGAN при коэффициенте масштабирования $r = 4$ можно видеть на рис. 2.

а) *б*) *в*)

Рис. 2. Сравнение качества изображений: *а* – бикубической интерполяция, *б* – SRGAN; *в* – оригинальное изображение

Библиографический список

1. Yang, Q. Spatial-depth super resolution for range images / Q. Yang, R. Yang, J. Davis, D. Nister // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – Minneapolis, Minnesota, USA, 2007. – P. 1–8.

2. Li, X. New edge-directed interpolation / X. Li, M. T. Orchard // IEEE Transactions on Image Processing. – 2001. – Vol. 10, № 10. – P. 1–7.

3. Krizhevsky, A. Imagenet classification with deep convolutional neural networks / A. Krizhevsky, I. Sutskever, G. E. Hinton // Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS). – 2012. – Vol. 25 (2). – P. 1–8.

4. Simonyan, K. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition / K. Simonyan, A. Zisserman // International Conference on Learning Representations (ICLR). – 2015. – P. 1–14. – arXiv:1409.1556

5. He, K. Identity mappings in deep residual networks / K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun // European Conference on Computer Vision (ECCV). – 2016. – Vol. 9908. – P. 1–14.

6. Generative adversarial nets / I. Goodfellow, J. Pouget-Abadie, M. Mirza, B. Xu, D. Warde-Farley, S. Ozair, A. Courville, Y. Bengio // Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS). – 2014. – Vol. 27. – P. 1–8.

7. Photo-Realistic Single Image Super-Resolution Using a Generative Adversarial Network / C. Ledig, L. Theis, F. Huszar, J. Caballero, A. Cunningham, A. Acosta, A. Aitken, A. Tejani, J. Totz, Z. Wang, W. Shi // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2016. – P. 1–9. – arXiv: 1710.10916, 2017

8. Bruna, J. Super-resolution with deep convolutional sufficient statistics / J. Bruna, P. Sprechmann, Y. LeCun // International Conference on Learning Representations (ICLR). – Barcelona, Spain, 2016. – P. 1–10.

КЛАССИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ ПО ПРИЗНАКАМ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ЛОГИСТИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ

Р. И. Новиков, Е. Г. Романова

Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия
E-mail: mr.retoko@mail.ru

В статье рассматривается алгоритм логистической регрессии [1], разработана программа на языке программирования python, реализующая данный алгоритм. Алгоритм обучен на тестовых датасетах: «Iris» - набор, содержит информацию об ирисах 3-х типов (Setosa, Versicolour, Virginica); «Digits» - набор данных представляет собой коллекцию рукописных цифр, представленных в виде картинок 8x8 пикселей и «Breast Cancer» - набор данных, представляющий собой статистику обнаружения рака молочной железы у пациентов и 30 параметров показателей их здоровья. Воспользовались методами загрузки данных из библиотеки sklearn [2].

Логистическая регрессия является частным случаем линейного классификатора [1], но она обладает хорошим "умением" прогнозировать вероятность того, что данное исходное значение x_i принадлежит к определенному классу. Результат логистической регрессии всегда находится в интервале [0, 1].

Пусть объекты описываются n числовыми признаками $X \to R^n$. Пусть $Y = \{0,1\}$ – конечное множество классов, $X^n = \{(x_1, y_1),..,(x_n, y_n)\}$ – обучающая выборка пар.

В логистической регрессии строится линейный алгоритм классификации $a: X \to Y$ вида

$$a(x,\omega) = sign\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i - \omega_0\right) = signx,\omega, \quad (1)$$

где ω_i – вес i-го признака, $\omega = (\omega_0, \omega_1, .., \omega_n)$ – вектор весов, x,ω – скалярное произведение признакового описания объекта на вектор весов. Предполагается, что искусственно введён нулевой признак: $x_0 = -1$.

Задача обучения модели логистической регрессии заключается в том, чтобы по выборке X^n настроить вектор весов ω. В логистической регрессии для этого решается задача минимизации эмпирического риска с функцией потерь специального вида:

$$Q(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\ln(1+\exp(-y_i x_i,\omega)) \to \min_{\omega}. \quad (2)$$

Чтобы уменьшить сложность модели и предотвратить переобучение добавим регуляризацию.

Регуляризация – метод добавления некоторых дополнительных ограничений к условию с целью решить некорректно поставленную задачу, или предотвратить переобучение. Для данной задачи будем использовать L_2-регуляризацию:

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y(t_i)\right)^2 + \lambda\sum_{i=1}^{n}a_i, \quad (3)$$

где λ – коэффициент регуляризации.

Подставим (3) в уравнение (2), получим:

$$Q(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\exp\left(-y_i x_i,\omega\right)\right) + \lambda R(\omega) \to \min_{\omega}. \quad (4)$$

Метод минимизации эмпирического риска – это общий подход к решению широкого класса задач обучения по прецедентам, в первую очередь, задач обучения с учителем, включая задачи классификации и регрессии.

Для решения данной задачи воспользуемся, например, алгоритмом градиентного спуска [3]. Идея метода заключается в том, чтобы осуществлять оптимизацию в направлении наискорейшего спуска и направление задаётся антиградиентом:

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \lambda^{[k]}\nabla f(x^{[k]}).$$

После того, как решение ω найдено, становится возможным не только вычислять классификацию $a(x) = signx,\omega$ для произвольного

объекта x, но и оценивать апостериорные вероятности его принадлежности классам:

$$P\{y \mid x\} = \sigma(\mathrm{y}\, x_i, \omega), y \in Y,\ \sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}},$$

где $\sigma(z)$ – сигмоидная функция. Во многих приложениях апостериорные вероятности необходимы для оценивания рисков, связанных с возможными ошибками классификации.

Для оценки качества модели использовался критерий средне квадратичного отклонения MSE – Mean of Squared Errors [1]

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n}(y - \hat{y})^T (y - \hat{y}). \quad (5)$$

Реализация

Были реализованы методы для обучения модели логистической регрессии: функция, обновляющая веса модели с помощью формулы (4); функция, классифицирующая объекты по признакам с помощью формулы (1), а также функция для оценки погрешности при обучении модели (5).

Для оценки качества работы алгоритмов машинного обучения используют различные метрики, например, accuracy, precision, recall, F-мера [1].

- Accuracy используется для классификации и показывает долю данных, для которых класс был определен правильно;
- Precision показывает долю объектов, названных классификатором положительными и при этом действительно являющимися положительными;
- Recall показывает, какую долю объектов положительного класса из всех объектов положительного класса нашел алгоритм;
- F-мера - способ объединить precision и recall в агрегированный критерий качества и представляет собой совместную оценку точности и полноты.

С помощью описанных метрикам можно оценить работу разработанного алгоритма. В таблице 1 представлены результаты алгоритма на датасете Iris, приведены метрики для каждого из 3-х классов датасета. Из таблицы видно, что алгоритм логистической регрессии работает достаточно точно для данного датасета.

Построена зависимость accuracy(качество) от коэффициента регуляризации. Алгоритм показывает наилучшее качество при коэффициенте регуляризации 1 (рис. 1).

В таблице 2 представлены результаты для датасета Digits. Можно заметить, что лучше всего алгоритм определяет цифры 0 и 1.

Таблица 1

Метрика / № класса	Precision	Recall	F-мера
0	100%	100%	100%
1	100%	100%	100%
2	100%	100%	100%

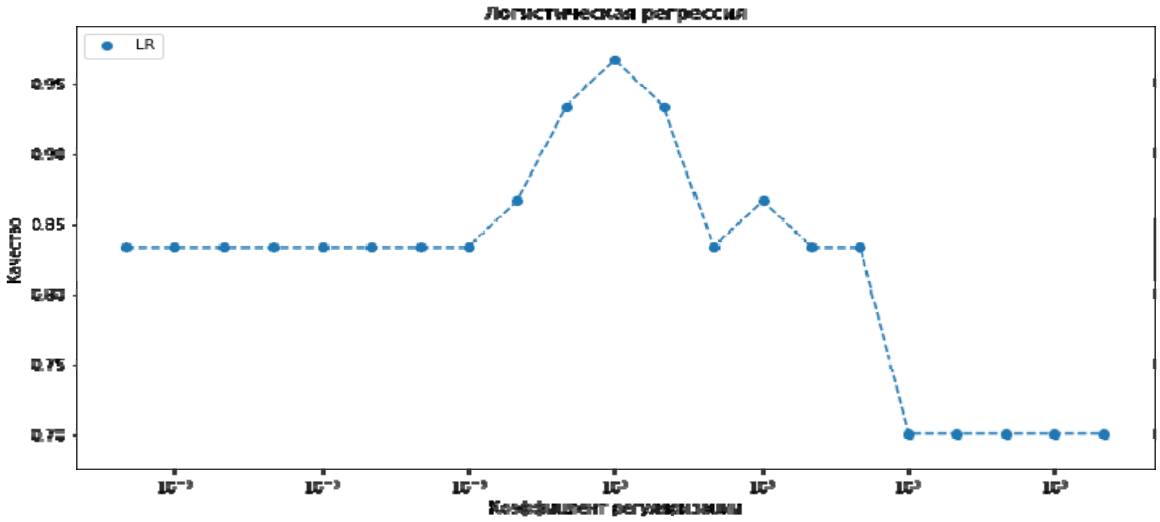


Рис. 1

Таблица 2

Метрика / № класса	Precision	Recall	F-мера
0	100%	100%	100%
1	90%	100%	95%
2	100%	100%	100%
3	100%	97%	99%
4	100%	98%	99%
5	92%	96%	94%
6	97%	97%	97%
7	100%	97%	99%
8	93%	90%	92%
9	95%	93%	94%

На следующем датасете реализованный алгоритм предсказывает цифру, изображенную на рисунке с точностью 97,5% при коэффициенте регуляризации 1 (рис. 2).

В табл. 3 размещены результаты работы алгоритма для датасета BreastCancer. алгоритм показывает лучшую точность 99% при коэффициенте регуляризации 0.1 (см. рис. 3).

Реализованный алгоритм логистической регрессии сравнивался с другими известными методами машинного обучения. Для этого вос-

пользовались библиотекой sklearn и использовали для сравнения методы: «К-ближайших соседей», «Решающих деревьев» и «Случайный лес». Для сравнения здесь применялась метрика accuracy. Точность алгоритмов для каждого из датасетов представлена в табл. 4.

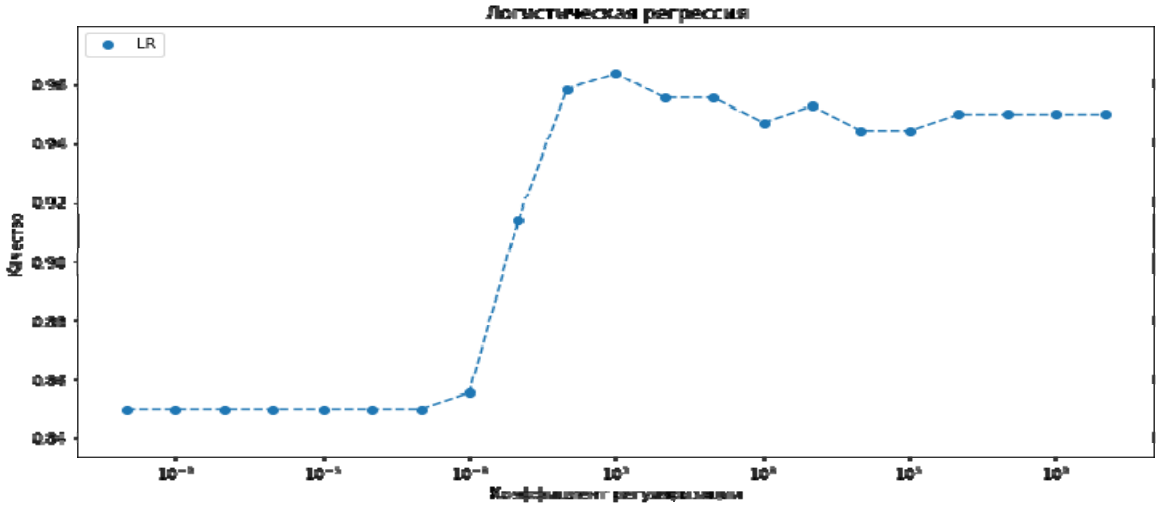


Рис. 2

Таблица 3

Метрика / № класса	Precision	Recall	F-мера
0	100%	98%	99%
1	99%	100%	99%

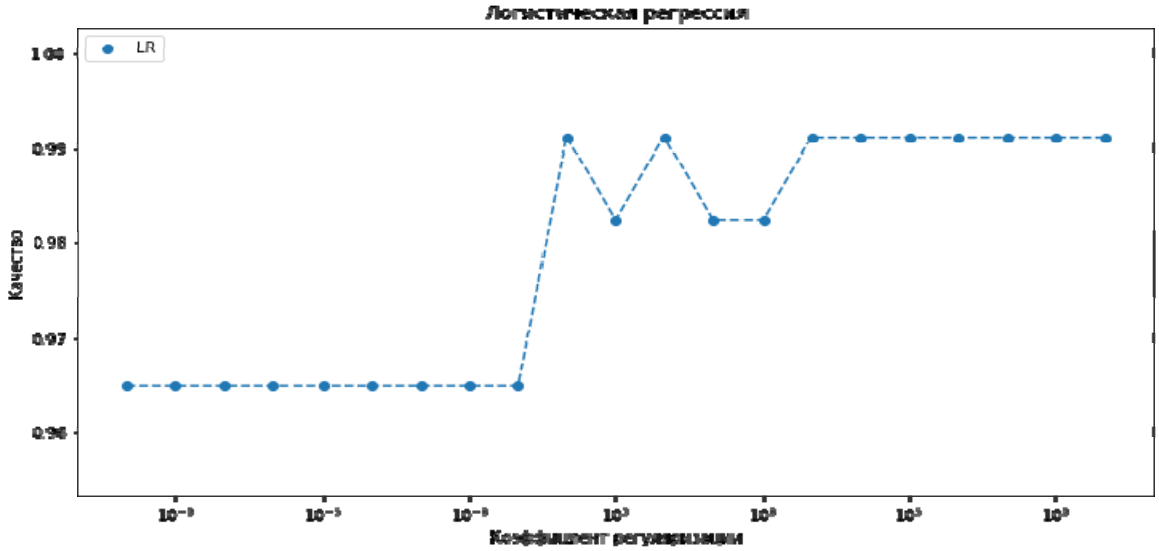


Рис. 3

По данной таблице видно, что реализованный алгоритм логистической регрессии показывает наилучшие результаты для описанных задач.

Таблица 4

Метод / Датасет	Логистическая регрессия	К-ближайших соседей	Решающих деревьев	Случайной лес
Iris	1.0	0.967	1.0	0.967
Digits	0.975	0.975	0.872	0.969
BreastCancer	0.99	0.947	0.938	0.965

Заключение

В работе использовалась модель логистической регрессии. Модель тестировалась на известных датасетах «Iris», «Digits» и «Breast Cancer». Проведено сравнения с другими методами машинного обучения. Алгоритм логистической регрессии показал наилучшие результаты для данных датасетов.

Библиографический список

1. Воронцов, К. В. Математические методы обучения по прецедентам (теория обучения машин) / К. В. Воронцов. – 2009. – 141 с. – URL: http://www.ccas.ru/voron

2. Scikit-learn: Machine Learning in Python, Pedregosa *et al.*, JMLR 12. – 2011. – P. 2825–2830.

3. Методы оптимизации : учеб. пособие / И. В. Гребенникова. – Екатеринбург : УрФУ, 2017. – 148 с.

ПОСТРОЕНИЕ 2D-ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

А. А. Вертяшкина, Ю. Ф. Захарова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: olegzakharov@rambler.ru

Искусственные нейронные сети – это попытка моделирования вероятностей обработки информации нервной системы.

С математической точки зрения, обучение нейронных сетей – это многопараметрическая задача нелинейной оптимизации.

С точки зрения машинного обучения, нейронная сеть представляет собой частный случай методов распознавания образов, дискриминантного анализа, методов кластеризации и т. п.

В качестве образов могут выступать различные по своей природе объекты: символы текста, изображения, образцы звуков и т. д. При обучении сети предлагаются различные образцы образов с указанием того, к какому классу они относятся. Образец, как правило, представляется как

вектор значений признаков. При этом совокупность всех признаков должна однозначно определять класс, к которому относится образец. В случае, если признаков недостаточно, сеть может соотнести один и тот же образец с несколькими классами, что неверно. По окончании обучения сети ей можно предъявлять неизвестные ранее образы и получать ответ о принадлежности к определённому классу.

Топология такой сети характеризуется тем, что количество нейронов в выходном слое, как правило, равно количеству определяемых классов. При этом устанавливается соответствие между выходом нейронной сети и классом, который он представляет. Когда сети предъявляется некий образ, на одном из её выходов должен появиться признак того, что образ принадлежит этому классу. В то же время на других выходах должен быть признак того, что образ данному классу не принадлежит. Если на двух или более выходах есть признак принадлежности к классу, считается, что сеть «не уверена» в своём ответе.

Искусственная нейронная сеть Хэмминга используется для решения задач классификации бинарных входных векторов. В основе ее работы лежат процедуры, направленные на выбор в качестве решения задачи классификации одного из эталонных образов, наиболее близкого к поданному на вход сети зашумленному входному образу, и отнесение данного образа к соответствующему классу. Для оценки меры близости к каждому классу используется критерий, учитывающий расстояние Хэмминга – количество различающихся переменных у зашумленного и эталонного входных образов.

Структурно нейронная сеть Хэмминга включает два слоя, количество нейронов в которых K равно количеству классов (K= N). Число входов M соответствует числу бинарных признаков, по которым различаются образы. Значения входных переменных принадлежат множеству {–1; 1}. Выходные значения подаются по обратным связям на входы нейронов второго слоя, в том числе свой собственный.

Общая постановка задачи, которая решается с помощью нейронной сети Хэмминга, следующая. Имеется исходный набор эталонных образов, представленных в виде бинарных векторов. Каждому из них соответствует свой класс. Требуется для поданного (подаваемого) на входы сети неизвестного образа произвести его сопоставление со всеми известными эталонными образами и отнесение к соответствующему классу либо сделать заключение о несоответствии ни одному из классов.

На стадии обучения_выполняется следующая последовательность действий:

a. Формируется матрица эталонных образов $\overline{\overline{X}}$ размера KxM.

b. Рассчитываем матрицу весовых коэффициентов нейронов первого слоя:

$$w_{ij} = x_{ij} / 2 \qquad (1)$$

или в матричной форме записи

$$\overline{\overline{W}} = \frac{1}{2}\overline{\overline{X}}$$

c. Предлагаются настройки активационной функции

- Вид – линейная пороговая функция:

$$f(s) = \begin{cases} 0, s \le 0 \\ s, 0 < s \le T \\ T, s \ge T \end{cases} \quad (2)$$

- Параметр Т, который вычисляется по следующей формуле:

$$T = \frac{M}{2}. \quad (3)$$

Таким образом, очевидно, что выходы нейронной сети могут принимать любые значения в пределах от [0,Т].

d. Задаются значения синапсов обратных связей нейронов второго слоя в виде элементов квадратной матрицы размера К х К:

$$\varepsilon_{jp} = \begin{cases} 1, j = p; \\ -\varepsilon, j \ne p, \end{cases} \quad (4)$$

где $\varepsilon \in (0, 1/K]$

или в матричной форме:

$$\overline{\overline{E}} = \begin{cases} 1 - для\ диагональных\ жлеиентов, \\ -\varepsilon - кроме\ диагональных\ элементов. \end{cases}$$

Синапсы обратных связей нейронной сети Хэмминга, имеющие отрицательный вес, называются ингибиторными, или тормозящими.

На стадии практического использования выполняются следующие действия:

- На входы сети подается неизвестный, в общем случае, зашумленный вектор сигнала $\vec{x}^*$
- Рассчитываются состояния выходные значения нейронов первого слоя.

Для расчета состояний нейронов используется соотношение:

$$s_{1j} = \sum_{i=1}^{M} w_{ji} x_i^* + T \quad (5)$$

или в матричной форме:

$$\vec{s_1} = \overline{\overline{W}}\vec{x}^* + \vec{T}.$$

Для расчета выходов нейронов первого слоя $\vec{y}_1$ к полученным значениям состояний применяется активационная функция [2].

- Для каждой итерации q рассчитываются новые значения состояния и выходов нейронов второго слоя.

Состояние нейронов определяются по соотношению :

$$s_{2j}^{(q+1)} = y_{2j}^{(q)} - \varepsilon \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^{K} y_{2p}^{(q)} \tag{6}$$

или в матричной форме записи:

$$\vec{s}_2^{(q+1)} = \overline{\overline{E}} \vec{y}_2^{(q)}.$$

В идеальном случае после стабилизации должен получиться выходной вектор с одним положительным и всеми остальными нулевыми элементами. Индекс единственного положительного элемента непосредственно указывает на класс неизвестного входного образа.

Если данные входного образа сильно зашумлены или в обучающей выборке отсутствовал подходящий эталон, в результате остановки цикла в предпоследнем пункте могут быть получены несколько положительных выходов, причем значение любого из них окажется меньше, чем $Emax$. В этом случае делается заключение о невозможности отнесения входного образа к определенному классу, однако индексы положительных выходов указывают на наиболее схожие с ним эталоны.

Такие нейросети состоят из 10–30 связанных слоев, которые работают последовательно: получив картинку, они анализируют ее и «сообщают» результаты анализа следующему слою. Например, первые слои могут искать на изображении края и углы, средние – интерпретировать наборы особенностей в отдельные объекты (например, двери или листья). Наконец, финальные слои объединяют все эти интерпретации воедино и делают выводы о том, что изображено на картинке – например, здание или дерево.

Чтобы получать «картины», исследователи заставляют работать нейронные сети задом наперед: они показывают сети случайный шум и просят «улучшить» его таким образом, чтобы на выходе получилась определенная интерпретация.

На рис. 1 представлен пример работы смоделированной нейросети с реальной фотографией: на рис. 1,*а* представлена исходная фотография сына одного из авторов статьи, на рис. 1,*б* представлена фотография с наложенным на нее Гауссовым шумом, на рис. 1,*в* – фотография 2,*б* восстановленная смоделированной нейросетью.

В дальнейшем в ходе работе были получены результаты обработки построенной моделью обучаемой нейронной сети различных абстракт-

ных изображений, картин известных художников и случайным образом зашумленных однородных поверхностей с дальнейшим распознаванием полученных образов.

а) *б*) *в*)

Рис. 1. Пример работы смоделированной нейросети с реальной фотографией

Библиографический список

1. Галушкин, А. И. Синтез многослойных систем распознавания образов / А. И. Галушкин. – Москва : Энергия, 1974.

2. Барцев, С. И. Адаптивные сети обработки информации / С. И. Барцев, В. А. Охонин. – Красноярск : Ин-т физики СО АН СССР, 1986. Препринт N 59Б. – 20 с.

3. Горбань, А. Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей [Архивная копия от 27 января 2012 на Wayback Machine] / А. Н. Горбань // Сибирский журнал вычислительной математики. – 1998. – Т. 1, № 1. – С. 12–24.

4. Чернодуб, А. Н. Обзор методов нейроуправления / А. Н. Чернодуб, Д. А. Дзюба // Проблемы программирования. – 2011. – № 2. – С. 79–94.

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО СОПОСТАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССОРА

И. А. Абрамов, Г. А. Штыков

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: igora512@yandex.ru; shtykov19980201@gmail.com

Задача распознавания образов возникла, значительно раньше современных средств вычислительной техники, но несмотря на это и на сегодняшний день играет значительную роль в различных областях жиз-

ни человека. Возможность распознавания основывается на схожести подобных объектов, и для любых изображений можно вычислить некий числовой показатель характеризующий близость этих изображений, данная идея и лежит в основе рассматриваемого метода.

Один из возможных вариантов представления изображения в памяти компьютера основывается на двумерной природе изображения, что дает возможность их представления в виде матрицы элементов (пикселей) с неотрицательными значениями, где каждый пиксель соответствует значению яркости (0-255).

Корреляционный метод относится к группе методов распознавания, основанных на теории решений, и имеет различные наименования в литературе. Часто встречаются названия "*image matching"* [1]*, "regional matching"* [2] *и "template matching"*. В базовой реализации этого метода сначала выбирается некоторый участок изображения, именуемый *"шаблоном"*, который представляет собой объект поиска. В матрицу шаблона записываются соответствующие значения яркости пикселей. Тогда, если $S(x, y)$ матрица изображения, в котором осуществляется поиск шаблона, алгоритм будет считать сумму произведений интенсивностей пикселей T в S. Двигая шаблон по всему изображению, вычисляется матрица корреляций. В этом случае её элементы будут равны SAD (Sum of Absolute Differences), как суммы абсолютных разностей, вычисляемых по следующей формуле:

$$SAD(x,y) = \sum_{i=0}^{T_{rows}} \sum_{j=0}^{T_{collums}} Diff(x+i, y+i, i, j) \ ,$$

\где *Diff* – модуль разности интенсивностей пикселей $S(x+i, y+i)$ и $T(i, j)$.

Недостаток данной корреляционной функции, состоит в ее чувствительности к изменению амплитуд значений эталона или исходного изображения. Что бы преодолеть это затруднение часто используют подход, при котором сопоставление осуществляется с помощью коэффициента корреляции, определяемого следующим выражением [3]:

$$\gamma(x,y) = \frac{\sum_s \sum_t [f(s,t) - \bar{f}(s,t)][w(x+s, y+t) - \bar{w}]}{\sqrt{\left\{ \sum_s \sum_t [f(s,t) - \bar{f}(s,t)]^2 \sum_s \sum_t [w(x+s, y+t) - \bar{w}]^2 \right\}}}$$

где $x = 0,1,2,\ldots,M-1, y = 0,1,2,\ldots,N-1,$ $\bar{w}$ – среднее значение пикселей в эталоне, $\bar{f}$ – среднее значение элементов изображения f в области, сов-

падающей с текущим положением *w*, а суммирование ведется по всем парам координат, общим для *f* и *w*. В данном случае коэффициент корреляции не зависит от изменения значений амплитуд эталона и изображения, в котором выполняется поиск эталона. На основании полученного значения коэффициента корреляции проверяется достоверность распознавания. Если $\gamma(x,y) \geq \gamma_{\min}$, то обнаружение считается достоверным, иначе объект поиска признается нераспознанным.

Алгоритм корреляционного сопоставления обладает достаточно высокой точностью распознавания. Одним из основных минусов данного алгоритма является его достаточно высокая вычислительная сложность, которая растёт по мере увеличения размеров эталона. При этом в процессе сопоставления требуется выполнить множество однотипных операций. Эти операции можно выполнять независимо, что свидетельствует о наличие параллелизма по данным. Поэтому для ускорения работы программы было решено использовать технологию CUDA.

Технология CUDA (Compute Unified Device Architecture) представляет собой платформу параллельных вычислений общего назначения и модель программирования. Программа реализовывается на упрощенном диалекте C, последовательная ее часть выполняется на CPU, а параллельная на GPU.

Программа начинает свою работу на CPU, где выполняется последовательный участок программного кода. Сначала происходит загрузка исходных данных, затем выделение под них места в видеопамяти с помощью функции **`cudaMalloc`** и их копирование на GPU, с помощью функции **`cudaMemcpy`**. После размещения данных в видеопамяти выполняется вызов функции ядра, и по окончанию ее работы с помощью происходит копирование результата из видеопамяти в основную память компьютера.

Функция, которую будут выполнять нити GPU, имеет следующий прототип:

```
void func_warp(float *a, float *b, float *c, int imH, int imW, int imRefH, int imRefW)
```

Здесь параметры **`a`** и **`b`** представляют собой указатели на матрицы интенсивности пикселов исходного и эталонного изображений соответственно, а **`c`** – указатель на матрицу результата. Четыре остальных параметра задают размеры по горизонтали и вертикали исходного и эталонного изображений.

В начале работы функции ядра для доступа к анализируемому пикселу производится расчет его локального индекса, который сохраняется в переменной **`tid`**:

```
tid = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x,
```

где **threadIdx.x** — номер потока в блоке, **blockIdx.x** — номер блока в сетке и **blockDim.x** — размер блоков.

Далее выполняется вложенный цикл, в котором происходит вычисление коэффициента корреляции, для каждого пикселя с шагом равным **blockDim.x*gridDim.x**, где **gridDim.x** – число блоков в сетке по размерности **x**, после чего результат записывается в матрицу-результат **c**.

Программная реализация рассмотренного алгоритма была выполнена на языке C++, CUDA C и скомпилированы с помощью компиляторов gcc 7.3.0 и nvcc V10.0.130. Эксперименты с программой проводились на компьютере на базе процессора Intel Xeon E5-1650v2(3500 МГц), 16 Гб DDR3(1333) ОЗУ, видеокарта NVIDIA GXT1050Ti, под управлением операционной системы Ubuntu 18.04.

В процессе эксперимента был проведен поиск образца на изображениях размерами 320×320, 640×640, 1600×166 и 3200×3200. При этом выполнялся поиск оптимального размеров блоков и сеток нитей. Кроме этого, было определено время работы параллельной программы. В таблице приведены временные показатели работы программы, выраженные в секундах. Ускорение определено для лучшего времени, которая продемонстрировала программа для конфигурации 512 блоков по 32 нити в каждом.

Таблица 1

Временные показатели работы программы

Кол-во блоков×нитей	Разрешение			
	320×320	640×640	1600×1600	3200×3200
4×4	0,3728	1,473	9,31	37,77
128×4	0,0341	0,067	0,517	1,67
256×32	0,0334	0,0652	0,358	1,1
512×32	0,0312	0,0645	0,357	1,08
32×512	0,0338	0,065	0,567	1,29
512×64	0,0343	0,0647	0,581	1,121
Последовательная	0,361	1,782	11,7	38,9
S_p	11,57	27,62	32,77	36,02

Из представленных временных показателей видно, что не любая конфигурация (блоки×нити) позволяет сократить время выполнения программы. В частности, конфигурация 4 блока по 4 нити в каждом не дает временного преимущества по сравнению с последовательной программой. Тем не менее, исходя из зафиксированных временных показателей работы программы можно заключить, что использование графического процессора позволило способствовало уменьшению времени

при поиске образца на изображении на основе корреляционного сопоставления.

Библиографический список

1. ECCV 2004, LNCS 3024 / T. Pajdla and J. Matas (Eds.). – Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2004. – P. 100–113,

2. URL: http://infolab.stanford.edu/IMAGE/Simplicity/ACM00.1/wang.pdf

3. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – Москва : Техносфера, 2005.

КРИПТОГРАФИЧЕСКАЯ УЯЗВИМОСТЬ АЛГОРИТМОВ С ОТКРЫТЫМ КЛЮЧОМ

А. А. Березин, Ю. Ф. Захарова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия.
E-mail: olegzakharov@rambler.ru

Современные криптографические сеансы, в отличии от сеансов прошлых поколений, подвергаются все большему и большему числу атак с целью взлома скрываемой информации. Разновидность и эффективность этих атак также сильно растет, поэтому для более эффективной защиты передаваемой информации необходимо знать какой опасности может подвергаться тот или иной криптосеанс с момента создания зашифрованного сообщения до момента получения этого сообщения оппонентом.

Современный криптоанализ выделяет следующие, наиболее распространенные виды атак:

– атаки на архитектуру
– атаки на конкретные реализации
– атаки на оборудование
– атаки на модели доверительных отношений
– атаки на пользователей
– атаки на средства восстановления после сбоев
– атаки на средства шифрования
– атаки с использованием побочных каналов
– аналитические атаки
– статистические атаки
– алгебраические атаки

В основной работе более подробно рассматривается именно последний вид атак.

При выполнении алгебраической атаки атакующий анализирует уязвимости в математических частях алгоритма и использует его внутренние алгебраические структуры, т.е. для получения ключа шифрования необходимо представить преобразования шифрования в виде системы многомерных многочленных уравнений и впоследствии решить данную систему.

Большинство современных шифров было создано с учетом традиционных методов криптоанализа, таких как дифференциальный и линейный , поэтому такого рода атаки зачастую не оказывают влияния на их безопасность. Для большинства подобных атак сложность возрастает экспоненциально с ростом числа раундов, при этом данные методы становятся неэффективными.

В отличие от них, алгебраический криптоанализ затрагивает внутреннюю структуру шифров и оказывается более эффективным. Следует отметить возможность улучшения производительности алгебраических алгоритмов криптоанализа путем распараллеливания вычислительных процессов.

Основная идея алгебраического криптоанализа заключается в составлении сложной системы булевых уравнений, описывающих преобразование шифра. А именно системы, которая строится на основе полностью известного алгоритма шифрования и связывает биты открытого текста, ключа и шифртекста. Небольшое число пар открытого и шифрованного текстов, полученных на неизвестном криптоаналитику ключе, позволяет провести означивание системы, а именно подстановку в уравнения значений битов из векторов P и C. Полученную таким образом конкретную систему, в которой неизвестными являются биты ключа, криптоаналитик пытается решить различными способами. Как правило, число уравнений в системе значительно превышает число переменных, а уравнения стараются строить так, чтобы система после означивания принимала наиболее простой вид. Особенностью системы булевых уравнений, возникающей при криптоанализе, является ее непротиворечивость, т. е. система заведомо имеет хотя бы одно решение. Это так поскольку существование ключа не является секретом: неизвестно лишь его конкретное значение. Решение систем булевых уравнений — очень трудная задача, которая в общем случае NP-полна.

Наиболее распространенными методами решения таких систем являются методы линеаризации. Они состоят в том, чтобы путем преобразования системы (домножения уравнений на мономы определенной степени и т. п.) свести ее к линейной от большего числа переменных. Как правило, чтобы полученную систему можно было решить, она должна быть переопределенной (т. е. она должна содержать гораздо больше уравнений, чем переменных). В 2000-х годах британский криптограф Николя Куртуа разработал несколько методов линеаризации криптогра-

фических булевых систем. Среди них — XL- и XSL-методы. Н. Куртуа и Й. Пипджик осуществили первую попытку применить XSL-метод к шифру AES, а перед этим установили, что процесс зашифрования AES можно смоделировать с помощью квадратичной системы уравнений. Долгое время до этого алгебраические атаки считались нереализуемыми на практике.

Появление XSL-атаки привело к новым криптографическим условиям на используемые булевы функции. Для обеспечения стойкости функция должна обладать большой алгебраической степенью и высокой алгебраической иммунностью. Чем больше значение алгебраической иммунности булевой функции, тем более стойким к алгебраическому криптоанализу является шифр, в котором она используется (например, если функция применяется в качестве фильтрующей в поточном генераторе и т. п.).

Таким образом, в алгебраическом криптоанализе рассматривается система полиномиальных уравнений (СПУ):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

где $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) : R^n \to R, i = 1, \ldots, n$ - нелинейные функции, определенные и непрерывные в некоторой области $G \subset R^n$.[1]

Решением системы уравнений является вектор $x_* = (x_{*1}, \ldots, x_{*n})$, который при подстановке в систему превращает уравнение в верное числовое равенство.

В настоящее время основным подходом к решению СПУ является символьный подход, основанный на теории идеалов и вычислении базисов Гребнера для отыскания решений в аналитической форме. При этом построение базиса Гребнера дает определить наличие у многочленов общих корней, т.е. совместность данной системы, определить число решений, позволяет привести систему к треугольному виду, либо исключить часть переменных.

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ набор многочленов из $C[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда они называются базисом Гребнера идеала $I = (f_1, \ldots, f_k)$, если для любого многочлена $f \in I$ его старший член делится на хотя бы на один из многочленов $f_1, \ldots, f_k$.

Первым алгоритмом по нахождению базиса Гребнера для заданной системы многочленов можно считать алгоритм, разработанный в 60-х годах XX века австрийцем Бруно Бухбергером, который в последствии получил имя автора.

Суть алгоритма заключается в том, что на вход подается произвольный набор многочленов $f_1,\ldots,f_k$, на выходе базис Гребнера $f_1,\ldots,f_k,f_{k+1},\ldots,f_m$ порожденного им идеала.

Критерий 1. Система S несовместна тогда и только тогда, когда базис Грёбнера идеала I(S) содержит ненулевую константу.

Критерий 2. Число решений системы S конечно тогда и только тогда, когда базис Грёбнера идеала I(S) содержит элементы $f_1, f_2, ..., f_n$, старшие члены которых являются степенями переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно.

Эти два критерия позволяют в ходе решения наглядно оценить имеется ли решение у СПУ.

После появления алгоритма Бухбергера были предприняты усилия по разработке способов понижения его сложности, поскольку наиболее трудоемкая его часть – деление полиномов и число делений необходимо уменьшать. Неопределенным является порядок выбора очередной пары полиномов, для которых вычисляется S-полином. В ряде случаев можно заранее определить, что S-полином будет иметь нулевой остаток. Все эти соображения привели к разработке нескольких стратегий – выбора последовательности действий:

– нормальная стратегия
– «сахарная» стратегия
– алгоритм Faugere F4.

Основным недостатком метода базисов Грёбнера является высокая сложность вычислений. Поэтому важной задачей является создание быстрых и эффективных программных библиотек для построения базисов Грёбнера. Повысить эффективность программ можно как за счёт оптимизации самих алгоритмов, так и благодаря их распараллеливанию. Алгоритмы могут работать с разной эффективностью на различных входных данных, однако существует общепризнанный набор стандартных тестовых примеров, на которых традиционно проверяется скорость работы таких алгоритмов и которые приведены в основной работе.

Библиографический список

1. Аржанцев, И. В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений / И. В. Аржанцев. – Москва : МЦНМО, 2003.

2. Зинин, М. В. Символьные алгоритмы и программы вычисления булевых базисов Грёбнера : дис. … канд. физ.-мат. наук / Зинин М. В. – Москва, 2011.

3. Пакет прикладных программ для решения систем нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных : учеб. пособие / В. Д. Борисевич, В. Г. Потемкин, С. П. Струнков. – Москва : МИФИ, 1998.

4. Панкратьев, Е. В. Основы компьютерной алгебры / Е. В. Панкратьев. – Москва : Изд-во МГУ, 2007.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РОДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ ПО ЗАПИСЯМ ГОЛОСОВ

Е. Е. Сипягина, Т. В. Черушева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: Gef44@yandex.ru; tank1100@yandex.ru

Одним из основных направлений в развитии речевых технологий в последние годы стала разработка методов выделения параметров речи из дискретизированных речевых сигналов как с целью передачи ее в цифровом виде в реальном масштабе времени, обеспечивающем высокую помехозащищенность и качество, так и с целью идентификации голоса. Поиск эффективных методов выделения параметров речевого сигнала программными средствами с целью идентификации и верификации голоса сохраняет актуальность. В качестве основного инструмента используется спектральный анализатор, формирующий непрерывный спектр частот для каждого момента времени в координатах амплитуда – частота. [1]

При разработке методов распознавания речи важную роль играет выбор системы признаков и методов идентификации, использующих эти признаки. Весь процесс обработки речевого сигнала можно разбить на несколько этапов:

- предобработка сигнала;
- выделение критериев;
- распознавание диктора.

Каждый этап представляет алгоритм или некоторую совокупность алгоритмов, что в итоге дает требуемый результат. На каждом этапе результат работы будет представлять собой входные параметры для следующего.

В настоящее время существуют различные оценки степени родства по признакам внешности. Предпринимаются попытки создания моделей, позволяющих идентифицировать голоса на наличие генетических родственных связей.

Данное исследование посвящено обнаружению акустических характеристик, которые передают информацию, относящуюся к личности говорящего и обнаружению его родственных связей.

Статья [2] посвящена теоретической возможности создания метода определения родственных связей по записям голосов и попыткам выделения характеристик, отвечающих за наличие родственных связей.

Для первого этапа исследования были выбраны спектры вокализованных безударных фонем «а» длительностью 0,85 мс, выбранных из записей голосов восьми человек. Родственные связи между ними указаны на рис. 1.

Также были вычислены коэффициенты корреляции полученного при помощи БПФ спектра между всеми записанными голосами, результаты представлены в таблице 1. Родственные группы выделены каждая своим цветом. Корреляция, как известно, показывает близость связей между сигналами к линейной зависимости.

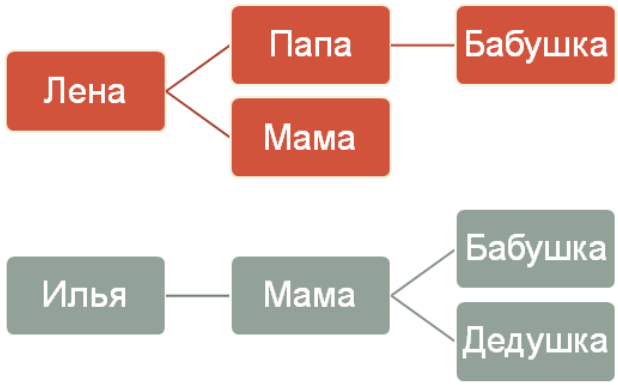


Рис. 1. Родственные связи для записанных голосов

Таблица 1

Коэффициенты корреляции спектра

	Бабушка	**Папа**	**Мама**	**Лена**	**Бабушка**	**Дедушка**	**Мама**	**Илья**
Б	1							
П	-0.0018	1						
М	0.8899	-0.0017	1					
Л	-0.0020	0.0132	-0.0018	1				
Б	0.1185	0.0551	0.0615	0.0012	1			
Д	0.0018	0.0314	0.0033	0.0087	0.0041	1		
М	0.0016	0.0019	0.0024	0.1830	0.0025	0.0170	1	
И	0.1893	0.2223	0.2909	0.0259	0.1843	0.2651	0.0485	1

Вероятности родственных связей по тому же спектру представлены в таблице 2.

Таблица 2

Вероятности родственных связей по спектру

	Бабушка	**Папа**	**Мама**	**Лена**	**Бабушка**	**Дедушка**	**Мама**	**Илья**
Б	1							
П	**0.9343**	1						
М	0	**0.9392**	1					
Л	**0.9276**	0.5505	**0.9339**	1				
Б	0.0000	0.0126	0.0053	**0.9563**	1			
Д	**0.9348**	0.1551	**0.8824**	0.6945	**0.8533**	1		
М	**0.9417**	**0.9316**	**0.9125**	0.0000	**0.9095**	0.4407	1	
И	0.0000	0.0000	0.0000	0.2406	0.0000	0.0000	0.0281	1

Как видно из результатов, прослеживаются некоторые закономерности, например, отчётливо заметно, что в первой группе родственников **Папа** является сыном **Бабушки**, а **Лена** – её **Внучкой**; вероятность кровнородственных связей между **Мамой** и **Папой** является выбросом.

Аналогично во второй группе, кроме того, между **Внуком** и его **Бабушкой** и **Дедушкой**.

Первая попытка выполнить сравнение на основе огибающей спектра не дала результата. Возможной причиной такого явления стал тот факт, что для сравнения выбирались *фонемы* из разных слов и фраз, даже из разных мест фраз.

Для второго этапа исследования был использован метод выделения признаков речевых сигналов, различающихся в мужской и женской речи, описанный в статье [3].

Для записанных голосов, было выполнено распознавание гендерной принадлежности. Результаты находятся в таблице 3.

Таблица 3

Размах значений комплексного кепстра
для фразы “Выходила на берег Катюша”

№	Название записи	Значение	Первоначальное попадание в интервал	Однозначное определение
1	Илья	1.519913920460737e+02	+	
2	Бабушка И	40.695187389565620	+	
3	Дедушка И	1.837781109816773e+02	+	
4	Мама И	1.009539469492160e+02	-	+
5	Лена	53.186146716324340	+	
6	Папа Л	3.564798908379141	-	+
7	Бабушка Л	25.462464374837440	+	
8	Мама Л	1.771306764792498e+02	-	+

Как видно из таблицы 3 записи под номерами **4**, **6** и **8** первоначально распознаны неверно. Также они дают ошибочную вероятность выявления родственных связей. Данная закономерность является базой для дальнейших исследований.

Также проверялось соотношение огибающей спектра родственных голосов на частотах, соответствующих звучания частоты музыкальных нот малой октавы. Построение огибающей спектра выполнено для фразы целиком.

Для записей голосов людей старше 80 лет выполнялось отдельное построение, для того чтобы учитывать возрастные изменения гортани. Результаты представлены на рисунке 3.

Был проведен анализ относительных разностей голосов родных и неродных людей. Результаты приведены в таблицах 4, 5.

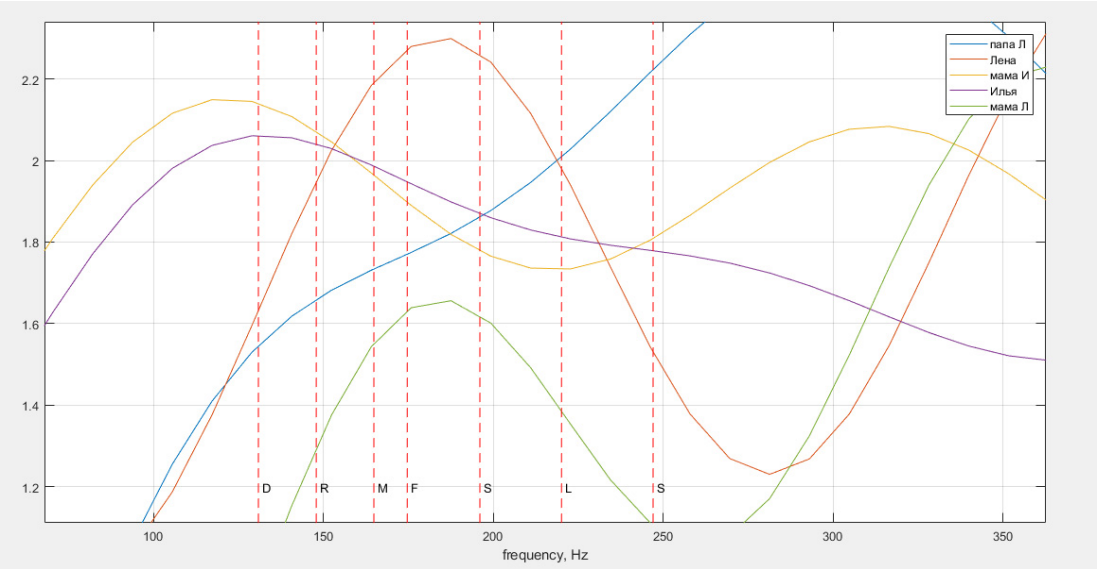


Рис. 2. Огибающие спектра для записей голосов под номерами 1, 3, 4, 5, 6

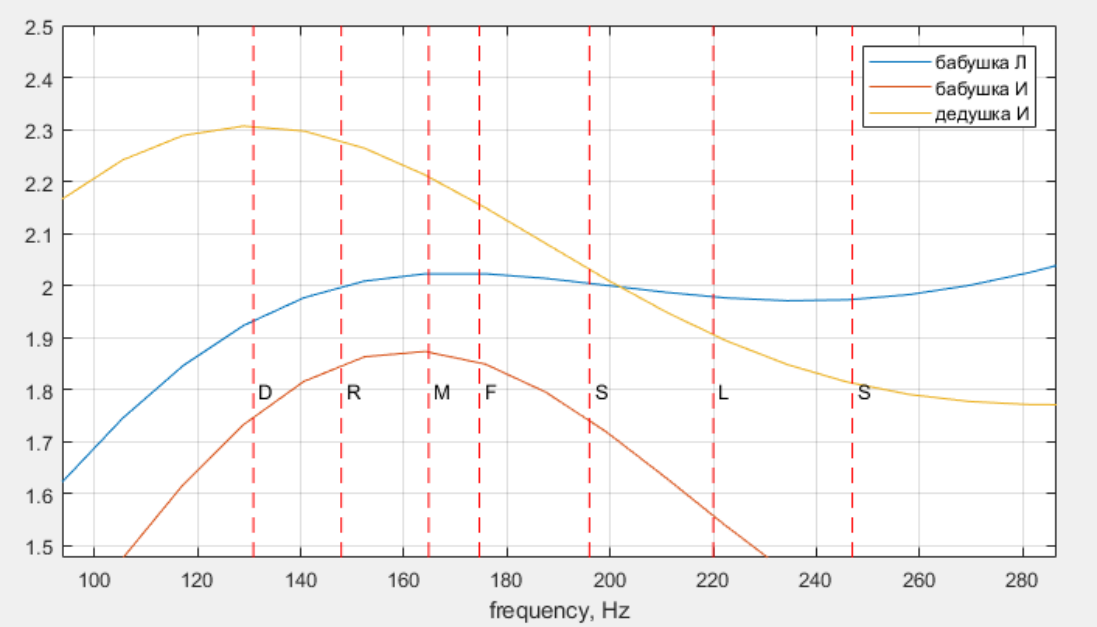


Рис. 3. Огибающие спектра для 80-летних

Таблица 4

Относительные разности голосов родных людей

	До	Ре	Ми	Фа	Соль	Ля	Си	>=0.5
папа	1,544089	1,657326	1,7339	1,7703	1,8623	2,0092	2,222785	
Лена	1,631885	1,94523	2,190065	2,27056	2,2582	1,9804	1,5303	4
Abs/Max	0,126784	0,415755	0,658736	0,722413	0,571709	0,041589	1	
мама И	2,138908	2,069629	2,069629	1,897734	1,7811	1,73445	1,809	
Илья	2,05991	1,986	1,986	1,9475	1,8715	1,8125	1,778582	5
Abs/Max	0,873866	0,925103	0,925103	0,550514	1	0,863385	0,336482	
мама Л	0,9402	1,2901	1,5499	1,62995	1,6169	1,3852	1,107585	
Лена	1,631885	1,94523	2,190065	2,27056	2,2582	1,9804	1,5303	7
Abs/Max	1	0,94715	0,925515	0,926158	0,927156	0,860507	0,611138	

Окончание табл. 4

	До	**Ре**	**Ми**	**Фа**	**Соль**	**Ля**	**Си**	**>=0.5**
Бабушка Л	1,9362	1,99679	2,02297	2,02301	2,00456	1,9789	1,973776	
папа	1,544089	1,657326	1,7339	1,7703	1,8623	2,0092	2,222785	5
Abs/Max	1	0,865734	0,737215	0,644486	0,362806	0,077274	0,635047	
Бабушка Л	1,9362	1,99679	2,02297	2,02301	2,00456	1,9789	1,973776	
Лена	1,631885	1,94523	2,190065	2,27056	2,2582	1,9804	1,5303	4
Abs/Max	0,686203	0,116263	0,376785	0,558204	0,571936	0,003382	1	

Таблица 5

Относительные разности голосов неродных людей

	До	**Ре**	**Ми**	**Фа**	**Соль**	**Ля**	**Си**	>=0.5
мама Л	0,9402	1,2901	1,5499	1,62995	1,6169	1,3852	1,107585	
мама И	2,138908	2,069629	2,069629	1,897734	1,7811	1,73445	1,809	3
Abs/Max	1	0,650308	0,433575	0,223394	0,136981	0,291355	0,585143	
Бабушка Л	1,9362	1,99679	2,02297	2,02301	2,00456	1,9789	1,973776	
мама Л	0,9402	1,2901	1,5499	1,62995	1,6169	1,3852	1,107585	4
Abs/Max	1	0,709528	0,47497	0,394639	0,389217	0,596084	0,86967	

В первой линии родства (Родители - Дети) у разнополых родственников число значений относительных разностей, больших 0.5, равно 4-5, у однополых – 6-7. У неродных людей значение равно 3-4. Таким образом, значение 4 является пограничным. Учитывая результаты из таблиц 1 и 2, то вероятность родственных связей **Мама Л** и **Бабушка Л** равна нулю, а для записей **Бабушка Л** и **Лена** вероятность равна 0,9276. Таким образом сделаны первые удачные шаги по определению родственных связей по записям голосов.

Библиографический список

1. Оганесян, А. Г. Эффективный алгоритм выделения формант из спектра речевого сигнала / А. Г. Оганесян // Известия Национальной академии наук РА «Государственного инженерного университета Армении». – 2006. – № 1. – С. 177–183.

2. Сипягина, Е. Е. О возможности создания метода определения родственных связей по записям голосов / Е. Е. Сипягина, Т. В. Черушева, И. В. Алексеев // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. XIII Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 165–168.

3. Сипягина, Е. Е. Выделение признаков речевых сигналов, различающихся в мужской и женской речи / Е. Е. Сипягина, Т. В. Черушева // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. XII Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 255–259.

4. Рабинер, Л. Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Л. Р. Рабинер, Р. В. Шафер. – Москва : Радио и связь, 1981.

РАЗВИТИЕ ДОРАБОТАННОГО АЛГОРИТМА (RU2323521C2) ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ, ХРАНИМОЙ В МИКРОСХЕМАХ ПОСТОЯННЫХ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Г. Ю. Салимов, Ю. Ф. Захарова, И. М. Теркин*, М. А. Петрук*

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
*Пензенский научно-исследовательский электротехнический институт,
г. Пенза, Россия
E-mail: salimovgorik@mail.ru

Большое количество неблагоприятных факторов космического пространства предъявляет высокие требования к приборам и системам, используемым в ракетно-космической технике. Достаточно отметить воздействие разных источников радиации на блоки памяти (ПЗУ): естественные и искусственные пояса Земли, солнечная активность, излучение глубокого космоса [1].

Под влиянием ионизирующего излучения (ИИ) возникают аппаратные и программные сбои:

– случайные сбои переключения (Single event transient, SET);

– случайные воздействия (Single event effects, SEE) вызванные попаданием тяжелых заряженных частиц (ТЗЧ) на интегральную схему (ИС);

– одиночный сбой (Single-event upset, SEU) - рекомбинация индуцированных ионом дырок и электронов, вызывает импульс тока, который изменяет состояние логического элемента (например, 1 меняется на 0);

– защелкивание транзисторов (Single effect latchup, SEL) в пропускающем состоянии [1–3].

Высокая стоимость для использования радиационно-стойкой компонентной базы вынуждает к применению, там где возможно, в космических аппаратах элементы, чья стоимость на порядки ниже. И применять методы повышения радиационной стойкости микросхем.

Методы, условно можно разделить по принципу работы [3]:

1.Конструктивно – технологические: экранирование, улучшение технологий производства.

2. Аппаратно – программные: резервирование, помехоустойчивое кодирование, реконфигурация – методы более работоспособны при ИИ [2, 3].

Для противодействия искажениям предусмотрены помехозащитные коды (П.К.): тройного резервирования (TMR) с укороченным кодом Хэмминга, хорошо изученные коды Рида – Соломона (к. РС) и коды Боуза – Чоудхури – Хоквенгема (к. БЧХ), контроль на CRC [4].

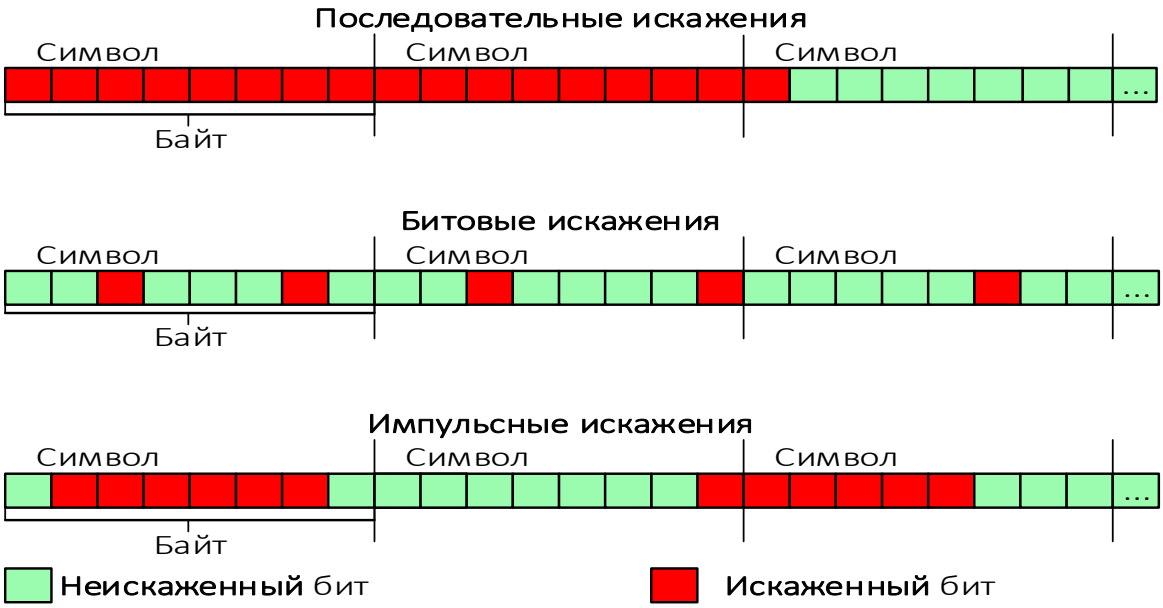


Рис. 1. Виды искажений массивов данных в ПЗУ

Рис. 2. Структура хранения информации

Исследование метода, запатентованного в 2006 г. (*RU2323521C2*), который основывается на трехкратном резервировании информации с применением к каждой комбинации циклично-избыточного кода (*CRC*), тем самым давая эффективное исправление “линейных” (последовательных для ПЗУ) искажений, показало, что возникающие битовые ошибки можно детектировать, применяя мажоритарный метод. На основе трех *CRC* допустимо построить полином ошибки, то есть выявить синдром искажения и с высокой вероятностью скорректировать комбинацию, что до этого являлось невозможным, поскольку считался кодом, который мог только идентифицировать сбой.

Алгоритм *RU2323521C2* восстановления информации:

1. Проверка целостности по CRC32
2. Коррекция последовательных искажений

3. Восстановление мажоритарным методом

Доработанный алгоритм *RU2323521C2*восстановления информации:

1. Проверка целостности по CRC32
2. Коррекция последовательных искажений
3. **Побитовое восстановление CRC**
4. **Детектирование ошибок**, восстановление мажоритарным методом.
5. **Построение полинома ошибок, корректирование сбоя на одноименных позициях.**

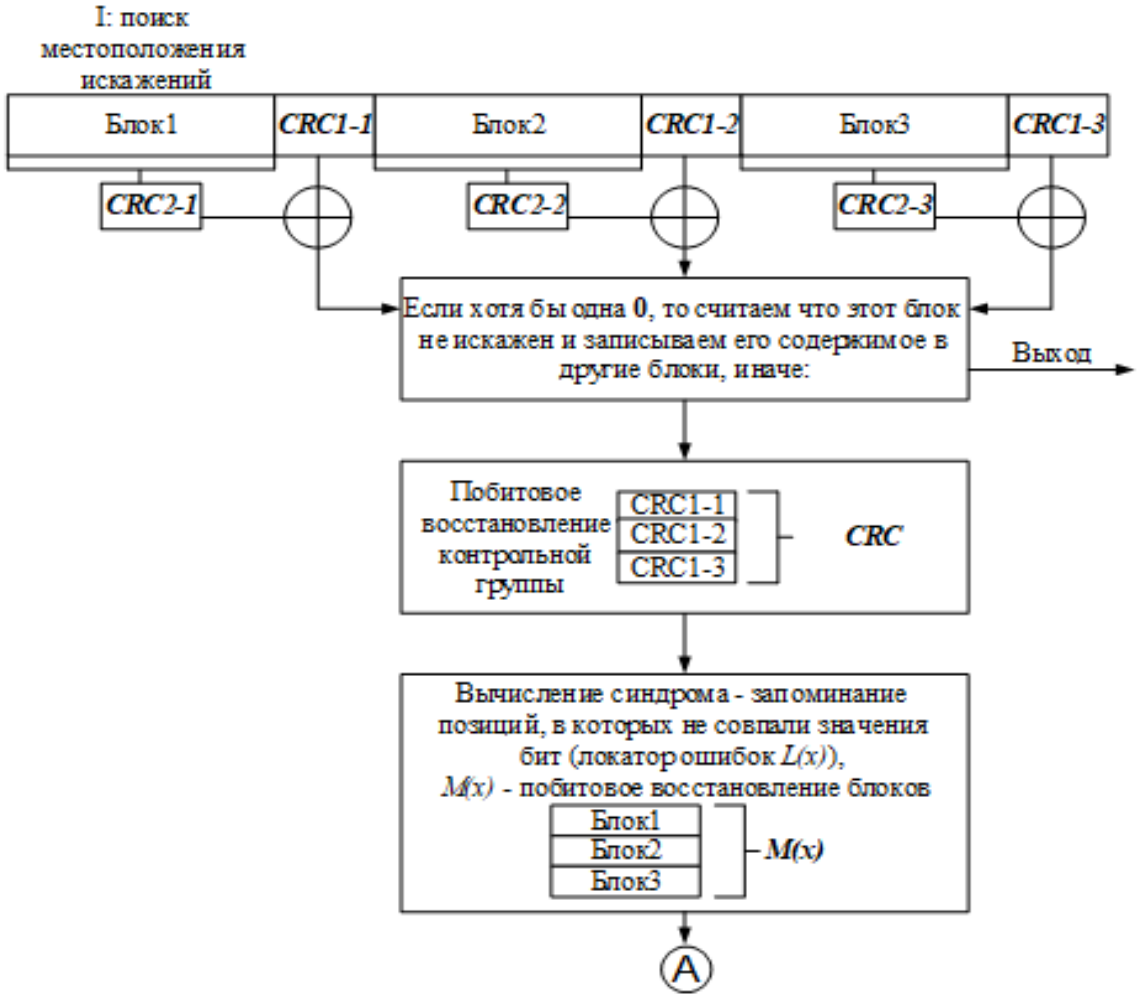


Рис. 3. Схема доработанного алгоритма

Исполнение задачи восстановления информации объёмом $N = 512$ бит показало: применимость кода RU2323521C2 к линейным ошибкам, при избыточности [3**N* +12]; подобранных к. БЧХ и РС к исправлению случайных битовых сбоев (SEU): к. БЧХ - 80 бит, к. РС - и 40 бит с избыточностью около [2.4**N*]; устойчивость к 8-и битовым помехам: к. БЧХ - 80 бит, к. РС - и 320 бит с избыточностью около [2.55**N*].

Как показало исследование, преимущества кода RU2323521C2 легкая и простая реализация, высокая коррекция линейных ошибок

(66,66 %). Недостатки: для успешной работы необходимо наличие одного неискаженного блока, низкая корректирующая способность относительно к. БЧХ и к. РС.

Микросхемы, как на отечественной, так и на зарубежной элементной базе, проектируются с учётом вероятности сбоя SEU, в среднем ориентированы на $1 \cdot 10^{-11}$ – $10 \cdot 10^{-11}$ ошибок/бит-день [1–3].

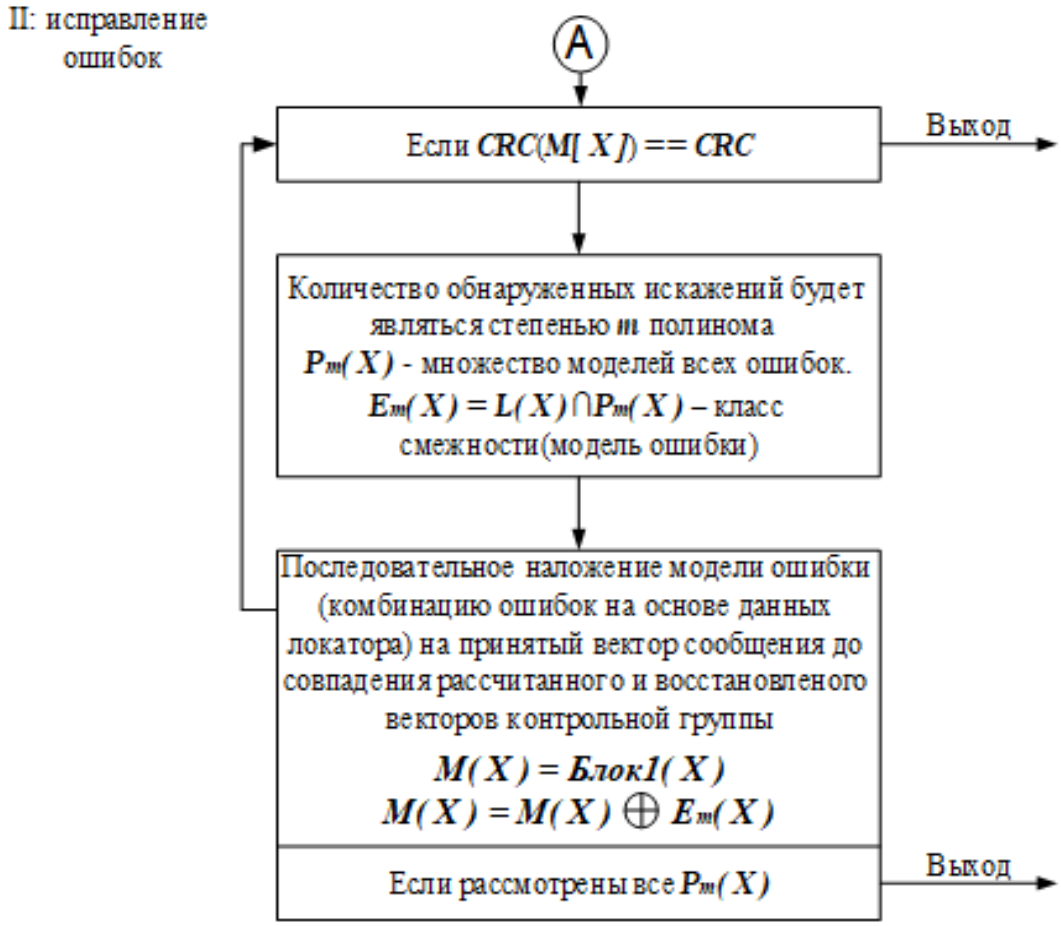


Рис. 4. Схема доработанного алгоритма

Исходя из этого, для каждой микросхемы применяется тот или иной П.К., однако стоит отметить, что высокое исправление ошибок на блок к. РС и БЧХ резко сказывается на сложности программной и аппаратной реализации, времени восстановления [4].

Проблема надежности хранения информации является актуальной не только в космосе. П.К. применяется для обеспечения надежности информации на носителях, при приеме/передачи сигналов, оборонной промышленности, медицинской электронике, при восстановлении критически важной информации.

В ходе проведенных работ, удалось повысить корректирующую способность кода, основу которого составляет мажоритарный анализ комбинаций TRM (тройное резервирование), за счет введения дополни-

тельной проверки целостности циклично-избыточным кодом CRC, применение метода максимального правдоподобия к восстанавливаемым комбинациям.

Таблица 1

Сравнение доработанного алгоритма RU2323521C2 и кода БЧХ

Факторы	**RU2323521C2**	**Код БЧХ**
Исправляет t, бит	32 бит – 98%	67
Исправляет импульсные t, 8-ми битовые	4	8
Исправляет t, последовательных бит	1 088	80
Объём информации, бит	512	512
Объём кода, бит	1 632	1 315
Избыточность, %	68,62	61,06
Объём ПО, байт	3 622	10 972
Время восстановления 32-х битной ошибки, сек.	1,7	1

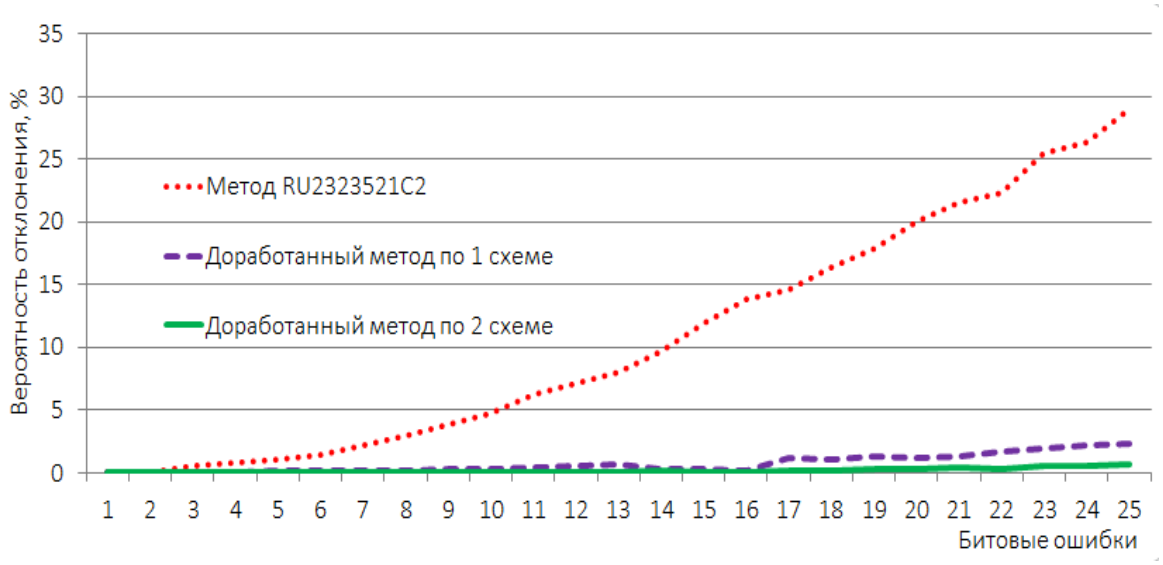


Рис. 5. Вероятность отклонения корректирующей способности

Таким образом, наблюдается улучшение характеристик исправляющей способности битовых и пакетных (импульсных) сбоев, что способствует устойчивости к неблагоприятному воздействию внешних факторов.

В плане дальнейших исследований предстоит определить вычислительную сложность доработанного кода, а также разработать адаптированную версию защиты информации, учитывающую ресурсы ЭВМ, что поспособствует ускоренному восстановлению.

Библиографический список

1. Шумилин, С. Радиационно стойкие микросхемы от компании «Миландр» / С. Шумилин, П. Леонов // Компоненты и технологии. – 2015. – № 7. – С. 76–79.

2. Юдинцев, В. Радиационно стойкие интегральные схемы. Надёжность в космосе и на земле / В. Юдинцев // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2007. – № 5 (79). – С. 72–77.

3. Modulation and Coding for Satellite and Space Communication / J. H. Yeun, et al. // Proc. IEEE. – 2005. – Vol. 78, № 7. – P. 1250–1265.

4. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр. – 2 изд. – Москва : Вильямс, 2007. – С. 1104.

5. Santarini, M. Cosmic radiation comes to ASIC and SOC design / M. Santarini // EDN. – 2005. – 5 Decem.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ В ВИДЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Е. А. Данилина, Д. А. Королёва, С. В. Шибанов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: lenokdanilina@mail.ru;
koroleva.1997@mail.ru; sergey.v.shibanov@yandex.ru

В общем случае все события классифицируются на простые и составные события (или сложные события).

Простым событием могут быть операции изменения или поиска, предоставляемые языком манипулирования базой данных базовой системы баз данных, такие как вставка, обновление, удаление, прерывание транзакции и т.д.

Составные события определяются из простых с использованием операторов событий.

Диапазон операторов событий варьируется от системы к системе. Наиболее распространенными составными событиями являются операторы, представленные в таблице 1.

Сети Петри-это графический и математический инструмент для моделирования параллельных, асинхронных, распределенных, параллельных, неопределенных и / или стохастических систем.

Сети Петри используются для моделирования процесса выявления и обнаружения сложных событий.

Сети Петри представляют собой кортеж (P, T, F), где:

1. P — конечное множество позиций, каждая из позиций соответствует множеству возможных событий.

2. T — конечное множество переходов, таких что P $\cap T$, множество переходов представляет собой условия, в результате выполнения которых наступает некое событие.

3. F $\subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – отношение инцидентности, определяющее множество дуг, направленных от позиций к переходам и от переходов к позициям.

Таблица 1

Операции алгебры событий

Операция	Описание операции	Представление
1. Дизъюнкция	Сложное событие возникает при появления события E1 или E2	E1∨ E2
2. Конъюнкция	Сложное событие возникает, когда происходят события E1 и E2	E1∧ E2
3. Последовательность	Сложное событие возникает, когда событие E2 появляется последовательно после события E1	E1;E2
4. Одновременный	Составное событие возникает, когда при одновременном возникновении событий E1 и E2.	E1=E2
5. Отрицание	Составное событие обнаруживает нечеткость события E1 во временном интервале	(E1∧ ˜E2)
6. Любое	Составное событие возникает, когда m из n разных событий E1, E2,..en произошло.	Любое(n)E1
7. Апериодический (Ap)	Составное событие, возникает, когда E2 в пределах E1 и E3.	Ap(E2, E1, E3)
9. Периодический (Per)	Составное событие возникает, при наличии постоянных t временных шагов между E1 и E2	Per(t, E1, E2)

При описании процесса обнаружения событий предметом моделирования в виде сетей Петри являются правила. Правила используются в активных системах базах баз данных для мониторинга интересующих событий и для своевременного реагирования на такие ситуации. Наиболее общая форма этих правил – это так называемые правила ECA (Event-Condition-Action). Правило ECA состоит из трех основных частей: событие, условия и действия.

Состояние правила оценивается всякий раз, когда происходит его инициирующее событие. Если условие выполнено, указанное действие будет выполнено. Одно правило может запускать или активировать другое. Поведение правила зависит как от транзакций базы данных, так и от ее взаимосвязи.

Для представления правил удобнее использовать раскрашенные сети Петри.

Рассмотрим представление правил ECA с помощью раскрашенных сетей Петри.

Обнаружение событий – это процесс получения результата «ИСТИНА» или «ЛОЖЬ», то есть событие обнаружено или нет. Поэтому удобнее будет представить его в виде позиции или места, а событие можно моделировать как «цвет». Если событие обнаружено, то в позиции, которая обозначена как событие, помещается цветной маркер. Если позиция отмечена цветным маркером, то срабатывает переход. Переход в данном случае выступает в качестве условия правила ECA. Если условие истинно, то переход является разрешенным. Таким образом, в цветной сети Петри событие является входным местом перехода, а действие выходным.

Данный алгоритм представлен на рисунке 1.

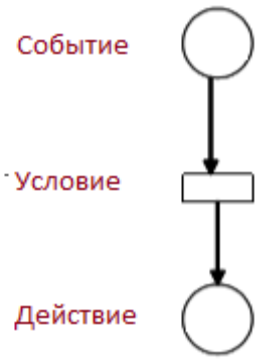


Рис. 1

Алгоритм, описанный выше моделирует правила ECA, описывающее простое событие. Для описания сложного события базовых элементов описанных на рисунке 1 недостаточно. Например, последовательность составных событий (seq (e1;e2)), times(Times (e; Int)) не может быть смоделирована с помощью базовых элементов сети Петри напрямую. Чтобы смоделировать сложное событие необходимо использовать в схеме сети Петри элементы, представленные на рисунке 2.

Для моделирования сложных событий используется так называемая условная цветная сеть Петри, она является модификацией обычной цветной сети Петри.

В условной цветной сети Петри места классифицируются на примитивные, виртуальные, места копирования и составные.

Примитивные и составные места отображают примитивные и составные события; виртуальное место используется для или составных событий; места копирования используются, когда одно событие запускает более одного правила, мы делаем копии события, чтобы при обнаружении события можно было включить все правила, вызванные этим событием.

Рис. 2

Переходы классифицируются на правила перехода, составные переходы и переходы копирования.

Правила перехода - это карта правила, составные переходы используются для создания составных событий из примитивных событий, а переходы копирования используются для создания копий событий (возможно, простых или составных событий).

Дуги классифицируются на нормальные дуги и дуги ингибиторов.

Простое событие моделируется непосредственно местом.

Сложные события, в отличие от простых, не могут быть смоделированы как одно место, поскольку составные события создаются вхождением (или не вхождением в случае отрицания сложного события) двух или более примитивных или составных событий.

Рассмотрим пример моделирования сложного события на операции «конъюнкция», представленный на рисунке 3.

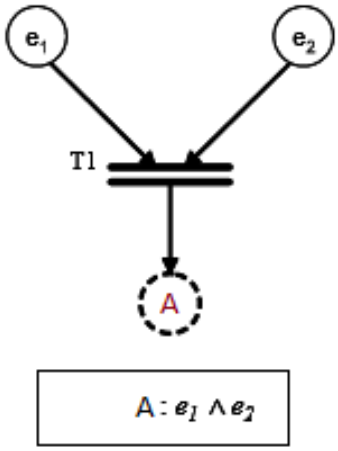


Рис. 3

На рисунке 3 представлена модель сложного события A = e1^e2.

Сложное событие A происходит тогда, когда выполняются события e1 и e2. Составной переход T1 повторяется, когда маркеры доступны

в местах, помеченных как e1 и e2, то есть когда выполняются события e1 и e2, то есть когда соответствующий маркеры в позициях e1 и e2 удаляются и помещаются в виртуальное место, помеченное как A, то это значит, что обнаружено событие A.

Правила ECA могут быть легко смоделированы раскрашенной сетью Петри следующим образом: события и действия смоделированы местами, которые являются входами и выходами перехода; сами правила ECA отображаются в переходы, условия прикреплены к переходам. Кольцо правил соответствует переходному кольцу. Однако обнаружение составных событий намного сложнее, чем примитивные события.

Библиографический список

1. Королёва, Д. А. Сравнительный анализ систем обработки сложных событий с открытым исходным кодом / Д. А. Королёва, Е. А. Данилина, С. В. Шибанов // Информационные технологии в науке и образовании. Проблемы и перспективы : сб. науч. ст. Всерос. межвуз. науч.-практ. конф. (г. Пенза, 14 марта 2018 г.) / под ред. Л. Р. Фионовой. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С.163–165.

2. Данилина, Е. А. Системы обработки сложных событий или CEP системы / Е. А. Данилина, Д. А. Королёва, С. В. Шибанов // Информационные технологии в науке и образовании. Проблемы и перспективы : сб. науч. ст. Всерос. межвуз. науч.-практ. конф. (г. Пенза, 14 марта 2018 г.) / под ред. Л. Р. Фионовой. – Пенза : Изд-воПГУ, 2018. – С. 149–152.

3. Timothy Masters. Data Mining Algorithms in C++. Data Patterns and Algorithms for modern Applications. – N.Y. : Apress, Inc., 2018. – P. 296.

4. Adaikkalavan, R. Event Operators: Formalization, Algorihms, and Implementation Using Interval-Based Semantics / R. Adaikkalavan. – Arlington : MS Thesis, 2002. – P. 4–5.

КРИПТОГРАФИЧЕСКАЯ СТОЙКОСТЬ КЛЮЧЕЙ И ЦИФРОВЫХ ПОДПИСЕЙ В РАЗЛИЧНЫХ КРИПТОСЕАНСАХ

С. Е. Макарова, Ю. Ф. Захарова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: olegzakharov@rambler.ru

Криптографическая система с открытым ключом (разновидность асимметричного шифрования) это система шифрования и/или электронной подписи (ЭП), при которой открытый ключ передаётся по открытому (то есть незащищённому) каналу и используется для проверки ЭП и

для шифрования сообщения. При этом для генерации ЭП и для расшифровки сообщения используется закрытый ключ. Криптографические системы с открытым ключом в настоящее время широко применяются в различных сетевых протоколах, в частности, в протоколах TLS и его предшественнике SSL (лежащих в основе HTTPS), в SSH, а также в PGP и S/MIME.

При использовании открытых каналов, прежде всего, следует учитывать, что во время любой передачи данных канал связи подвергается внешним воздействиям, или в нем могут происходить внутренние процессы, которые приводят к искажению передаваемой информации. Такие воздействия называются помехами или «шумами» (естественными или созданными злоумышленниками). Остановимся более подробно на естественных помехах.

Источники помех могут быть внешние, например, разряды молнии или одновременное воздействие нескольких близко расположенных источников одного типа. Внутренние особенности канала также влияют на помехи, например, процесс затухания сигнала в линии связи, вызванный большим расстоянием между приемником и источником. Даже самые маленькие помехи могут сказаться на передаваемой информации и вызывать искажения.

Однако, в случае передачи открытых ключей и/или цифровых подписей должна быть абсолютно полная уверенность, что вся информация дойдет до получателя в неискаженном виде.

С помощью помехоустойчивого кодирования можно избежать шума при передаче информации. Помехоустойчивое кодирование – кодирование, которое позволяет обнаружить и исправить ошибки, которые появились в результате передачи информации через канал с помехами.

Коды, позволяющие обнаруживать и исправлять ошибки, называются корректирующими. Среди корректирующих кодов широко используются циклические коды, позволяющие осуществлять коррекцию групповых ошибок и применяемые для исправления двух и более ошибок ($d_0 \geq 5$). Способность кода обнаруживать и исправлять ошибки достигается за счет введений избыточности в кодовые комбинации, т.е. m проверочных разрядов, поэтому кодовым комбинациям из k двоичных информационных символов, поступающих на вход кодирующего устройства, соответствует на выходе последовательность из n двоичных символов (такой код называется (n, k) - кодом).

Обозначим через k длину кодируемого вектора, d - кодовое расстояние, n - длину закодированного вектора. Тогда скорость передачи информации кода будет определяться как

$$R = \frac{k}{n}$$

Для исправления S ошибок количество комбинаций кодового слова, составленного из m проверочных разрядов $N = 2m$, должно быть

больше возможного числа ошибок, при этом количество обнаруживаемых ошибок в два раза больше, чем исправляемых:

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{s} C_n^i = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots,$$

$$m \geq \log_2 \sum_{i=0}^{s} C_n^i .$$

При этом,

$$m = [log2(1+n)] \text{ или } m = [log2\ \{(k+1)+ [log2(k+1)]\}],$$

где квадратные скобки обозначают округление до большего целого.

Для построения кодов с большим кодовым расстоянием требуется вводить много проверочных символов, не передающих информацию от источника к адресату, а выполняющих вспомогательную роль. Наличие большого числа проверочных символов при фиксированной длине кодового слова уменьшает число информационных символов, а следовательно, и скорость передачи информации Таким образом, хорошие корректирующие свойства кода и высокая скорость передачи информации - требования противоречивые. Поэтому задача построения кодов с приемлемыми значениями d и R - задача оптимизации, не имеющая единственного решения. Параметры n, k, d, характеризующие код, не могут принимать произвольных значений. Нетрудно видеть, что:

– среди кодов с одинаковыми параметрами n и k лучшим является код, который имеет больше кодовое расстояние d,

– среди кодов с одинаковыми параметрами n и d лучшим является код, который имеет большее число информационных символов k,

– среди кодов с одинаковыми параметрами k и d лучшим является код, который имеет n, k, d, меньшую длину n, а следовательно, и меньшее число проверочных символов m.

– между рассмотренными параметрами n, k, d, существуют определённые соотношения, задаваемые границами для кодового расстояния или для скорости передачи информации.

Теорема 1. (Верхняя граница Плоткина). Если существует q-ичный блоковый код с числом слов M и кодовым расстоянием d, то справедливо:

$$d \leq \frac{(q-1)\cdot n}{q(M-1)} \cdot M$$

Теорема 2. (Нижняя граница Варшамова – Гилберта). $\exists\,(n,k)$ – код (линейный) с минимальным кодовым расстоянием d, параметры которого удовлетворяют неравенству:

$$\sum_{i=0}^{d-2}\binom{n}{i}(q-1)^i \geq q^{n-k}.$$

Тогда

$$q^n\sum_{i=0}^{d-2}\binom{n}{i}\left(1-\frac{1}{q}\right)^i q^{n-i} \geq q^{-k} \text{ -}$$

вероятность получить не более (*d*-2) успехов в схеме Бернулли.

Граница Варшамова - Гильберта является границей существования и дает нижнюю оценку кодового расстояния для "наилучшего" кода.

Коды, границы параметров которых достигают равенства, называют экстремальными. Более сложная их вариация - дважды четные экстремальные коды описана в работе [1]. Однако, как показала практика, в задаче исправления ошибок в ЦП наиболее эффективными являются коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ) – класс экстремальных циклических кодов, исправляющих кратные ошибки, т. е. две и более или широко используемое подмножество кодов БЧХ - коды Рида-Соломона, которые позволяют исправлять пакеты ошибок.

Теоретически коды БЧХ могут исправлять произвольное количество ошибок, но при этом существенно увеличивается длительность кодовой комбинации, что приводит к уменьшению скорости передачи данных и усложнению приемо-передающей аппаратуры (схем кодеров и декодеров).

Методика построения кодов БЧХ отличается от обычных циклических, в основном, выбором определяющего полинома *P(x)*. Коды БЧХ строятся по заданной длине кодового слова *n* и числа исправляемых ошибок *S* , при этом количество информационных разрядов *k* не известно пока не выбран определяющий полином.

В случае кодов Рида-Соломона пакет ошибок длины *b* представляет собой последовательность из таких *b* ошибочных символов, что первый и последний из них отличны от нуля.

Коды Рида-Соломона широко используются в устройствах цифровой записи звука, в том числе на компакт-диски и могут быть результативно применены для исправления ЦП. Для этого данные, состоящие из отсчетов, объединяются в кадр, представляющий кодовое слово. Кадры разбиваются на блоки по 8 бит. Часть блоков являются контрольными.

Обычно 1 кадр (кодовое слово) = 32 символа данных +24 сигнальных символа +8 контрольных бит = 256 бит.

Сигнальные символы это вспомогательные данные, облегчающие декодирование: служебные сигналы, сигналы синхронизации и т. д.

При передаче данных производится перемежение (изменение порядка следования по длине носителя и во времени) блоков с различным сдвигом во времени, в результате чего расчленяются сдвоенные ошибки,

что облегчает их локализацию и коррекцию. При этом используются коды Рида-Соломона с минимальным кодовым расстоянием d0 = 5.

В качестве альтернативы рассмотренным в работе корректирующим кодам можно использовать также так называемые сверточные коды и контрольные биты, однако, они показали меньшую эффективность на практике.

Библиографический список

1. Йоргов, В. Й. Дважды четные экстремальные коды длины 64 / В. Й. Йоргов // Проблемы передачи информации. – 1986. – Т. 22, № 4. – С. 35–42.

2. Духин, А. А. Теория информации / А. А. Духин. – Москва : Гелиос АРВ, 2007.

3. Кудряшов, Б. Д. Теория информации : учебник для вузов / Б. Д. Кудряшов. – Санкт-Петербург : ПИТЕР, 2008. – 320 с.

4. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки / У. Питерсон, Э. Уэлдон. – Москва : Мир, 1976. – С. 596.

5. Семенюк, В. В. Экономное кодирование дискретной информации / В. В. Семенюк. – Санкт-Петербург : СПб ГИТМО (ТУ), 2001.

О ВЫЯВЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК, ОТВЕЧАЮЩИХ ЗА БЛИЗКИЕ ПО ЗВУЧАНИЮ РЕЧЕВЫЕ СИГНАЛЫ

Э. С. Паршикова, Т. В. Черушева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: elzuma-96@mail.ru, tank1100@yandex.ru.

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) – одно из наиболее перспективных и динамично развивающихся направлений современной науки и техники. К ее качественным преимуществам относят: реализуемость сложных (оптимальных) алгоритмов обработки с высокой точностью; программируемость и функциональную гибкость; возможность адаптации к обрабатываемым сигналам; возможность аппаратной реализации с использованием спецпроцессоров и чипсетов ЦОС. Области ее применения: радио- и телевизионные системы цифровой связи, системы сотовой связи, компьютерные сети, радио- и звуколокация, медицина, обработка изображений и потоков видеоданных, музыки, и др.

ЦОС в сфере обработки и передачи речевых сигналов получила широкое распространение и продолжает интенсивно развиваться. Это обусловлено прогрессом в области сотовой и мобильной связи, других видов цифровой связи, IP-телефонии. Все более значимыми становятся результаты работ по распознаванию и синтезу речи.

Принципиальный недостаток всех методов биометрии, кроме речевого, состоит в постоянстве используемого биометрического кода, т.к. отпечатки пальцев или ладоней, рисунок радужной оболочки и черты лица неизменны для индивидуума. В отличие от биометрии по фиксированным параметрам, верификация по голосу обладает практически неограниченным потенциалом для снижения ошибки за счет использования все более длинных речевых сообщений. Верификации по голосу может использоваться в темноте, на расстоянии, в частности, по стандартному телефонному каналу, в условиях, когда невозможно получить изображение лица.

При разработке систем верификации возник вопрос о возможности имитации голоса целевого диктора. Эксперименты с профессиональными имитаторами показали, что успех невелик. У имитаторов получается подделывать интонационный контур и карикатурно подчеркивать явные особенности речи, но имитировать глубинные факторы, определяющие индивидуальные свойства речи, не удается. Но было выявлено, что родственные голоса одного и того же пола обладают определенным сходством. Что не удивительно, т.к. голос зависит от размера гортани, строения лицевых пазух и толщины связок, а людям свойственно иметь схожие черты с родителями (рост, лицо, толщина костей/связок и т.д.).

Перед нами встает задача выявить характеристики, отвечающие за близкие по звучанию речевые сигналы.

Обработка речевых сигналов происходит следующим образом: сначала сигнал фильтруется, вычисляется преобразование Фурье, логарифмируем его и берем обратное преобразование Фурье и таким образом получаем кепстр.

Для этого нам нужно взять от кепстра преобразование Фурье – получаем огибающую, и в ней находим локальные максимумы – они будут соответствовать формантным частотам.

На рис. 1 представлены генераторная и фильтровая функции и колебания, как в спектральном, так и во временном виде. Участки частотных диапазонов около спектральных максимумов, определяющие восприятие и распознавание конкретных звуков речи называются *формантами.*

Исследование речи показывает, что наиболее существенную роль в приеме речи играют две первые форманты. Третья и четвертая форманты, хотя и определяют качество передних гласных, но в значительно большей степени играют роль при определении индивидуальности диктора. В то же время соотношение между формантными частотами, а также форма спектральности огибающей представляют одну из основных характеристик для распознавания звуков речи и поэтому представляют, как теоретический, так и практический интерес, особенно для целей анализа и синтеза речи.

На рис. 2 представлен результат программы, которая выбирает один маленький фрагмент сигнала и определяет в нем положение формант.

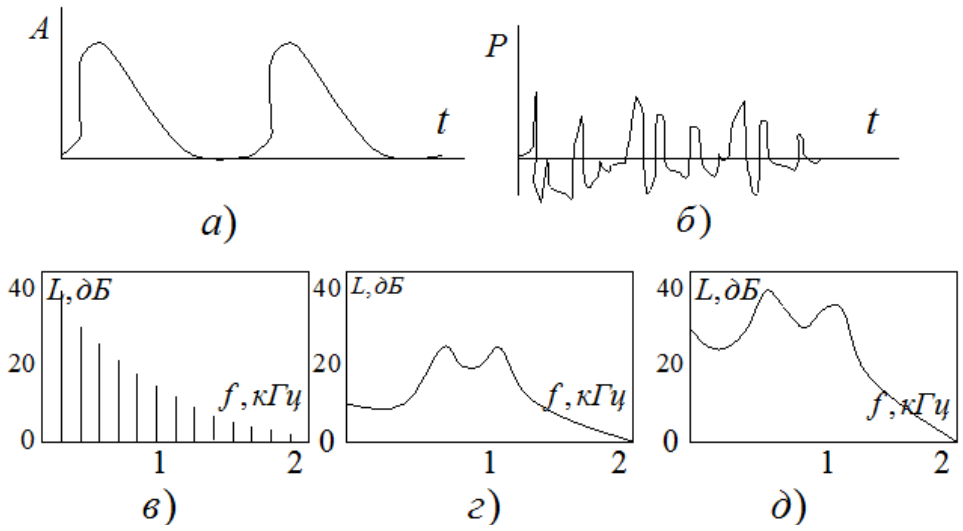


Рис. 1. Процессы в речевом тракте: а – импульсы голосовых связок; б – излучаемая волна; в – спектр источника $E(f)$; г – характеристика передающего тракта $F(f)$; д – спектр излучаемого звука $p(f) = E(f)F(f)$

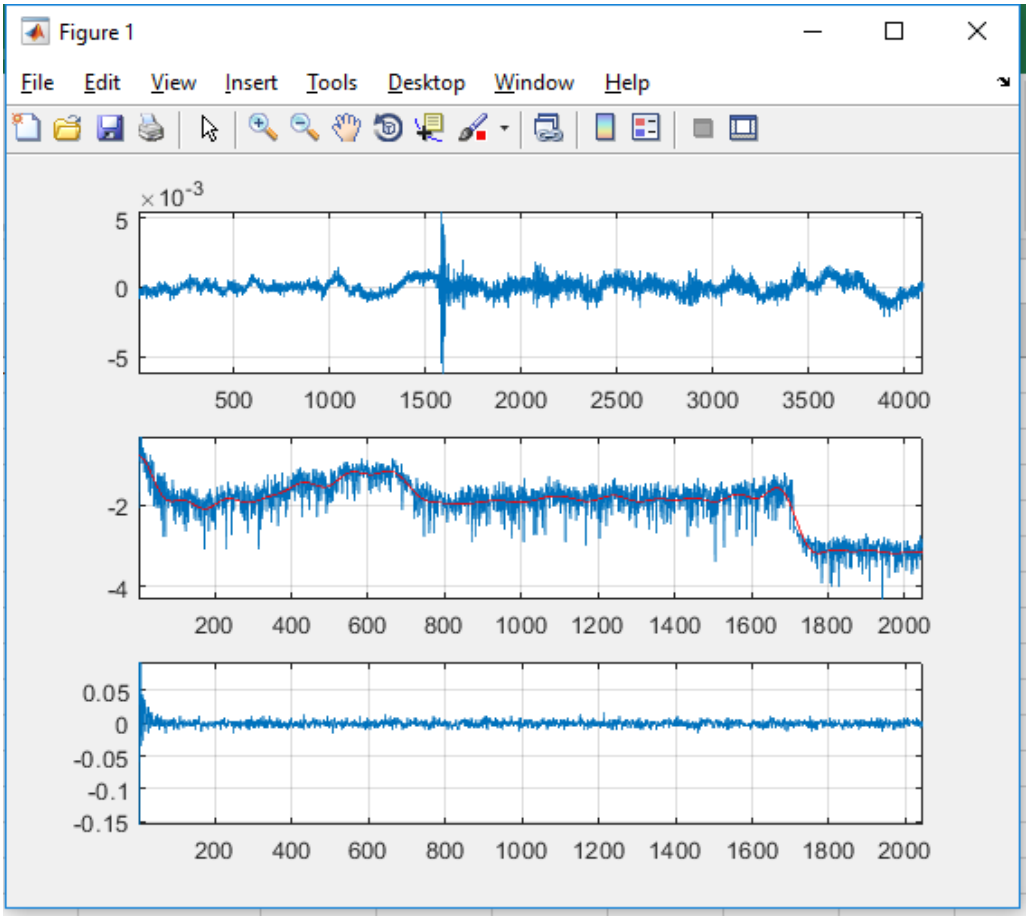
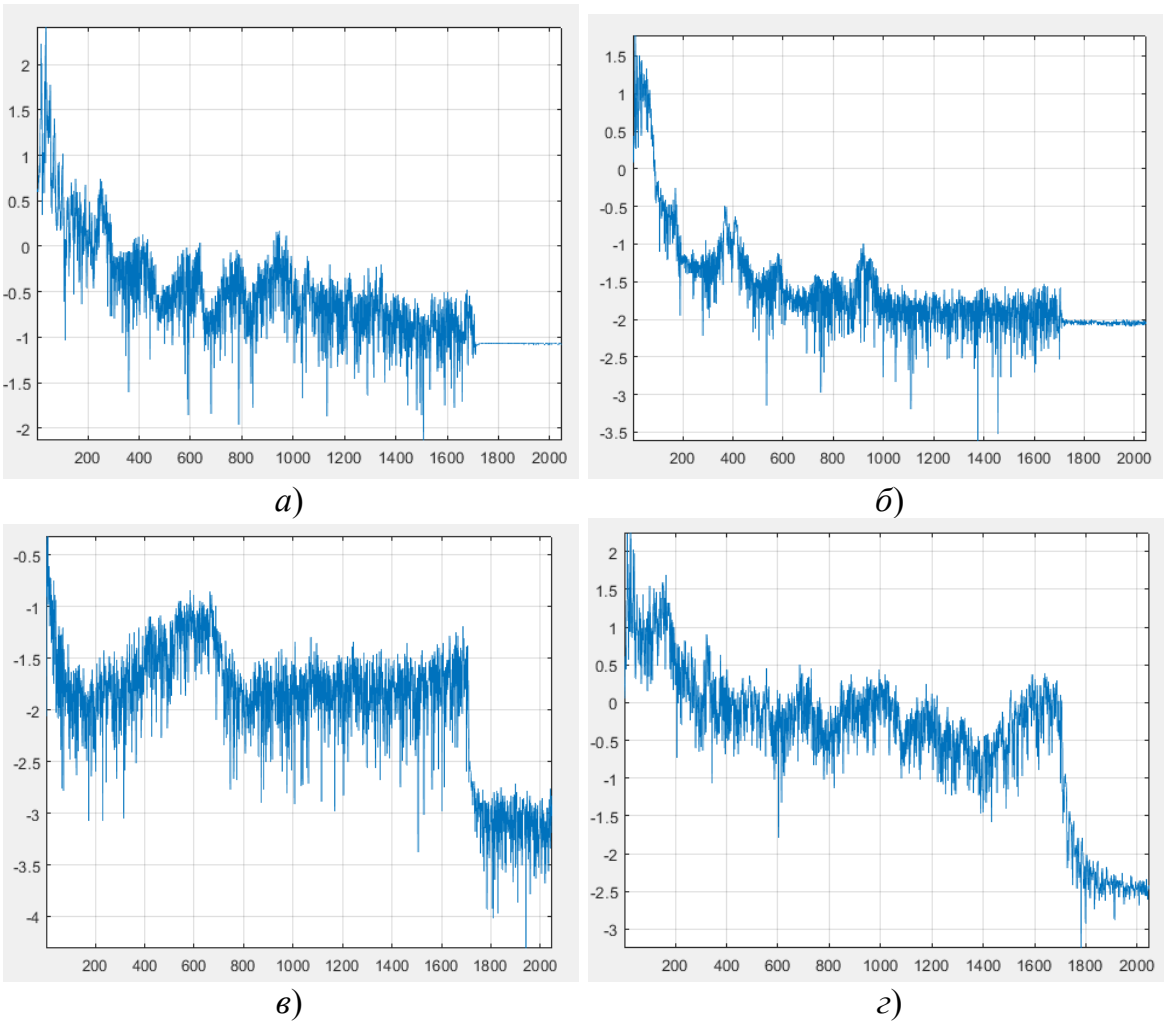


Рис. 2. Результат на графике – верхний сам фрагмент сигнала, нижний – кепстр, средний – логарифм модуля спектра синим и огибающая красным

По огибающей легко определить положение формантных частот на спектре. За длину обрабатываемого участка берется размер окна fft.

Для обработки более длинных участков надо пройти по сигналу окнами с шагом примерно 30 мс и записать каждую форманту в отдельный массив. Так получаем формантную траекторию.



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 3. Логарифм модуля спектра анализируемых голосов:
а – дочь; *б* – муж; в – мама; г – папа

Таблица 1

Набор формант у разных людей

	1-я Форманта	2-я Форманта	3-я Форманта	4-я Форманта	
Эля	136	146	152	158	Дочь
Надежда	136	146	152	160	Мама
Сергей	140	151	164	171	Папа
Илья	135	143	162	170	Муж

Таким образом форманты, отвечающие за индивидуализацию личности (3-я и 4-я) близки у матери и дочери, а 1-я и 2-я форманты совпадают. Такая же картина прослеживается у других анализируемых речевых сигналов.

Библиографический список

1. Сапожков, М. А. Вокодерная связь / М. А. Сапожков, В. Г. Михайлов. – Москва : Радио и связь, 1983. – 248 с.

2. Fant, G. G. M. Acoustic theory of speech production / G. G. M. Fant. – Paris : Mouton & Co., The Hague, 1970. – 328 p.

3. Маркел, Дж. Д. Линейное предсказание речи : пер. с англ. / Дж. Д. Маркел, А. Х. Грэй ; под ред. Ю. Н. Прохорова и В. С. Звездина. – Москва : Связь,1980. – 308 с.

4. Рабинер, Л. Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Л. Р. Рабинер, Р. В. Шафер. – Москва : Радио и связь, 1981.

РАЗРАБОТКА КРОССПЛАТФОРМЕННОГО МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Р. И. Новиков, Т. В. Черушева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: mr.retoko@mail.ru; tank1100@yandex.ru

В современных условиях рыночной экономики обязательным условием успеха в деятельности организации и сохранения ее организационной структуры является обеспечение информационной безопасности.

Компании, занимающиеся разработкой приложений, для работы с приватными документами в целях обеспечения информационной безопасности используют облачные хранилища, доступ к которым осуществляется через веб-браузер по логину и паролю сотрудника.

Таким образов, для таких компаний требуется приложение, которое позволит взаимодействовать с облачным хранилищем с мобильных устройств под управлением, например, таких систем:

- iOS (телефон, планшет),
- Android (телефон, планшет),
- Windows Phone.

Выдвинем требования к разрабатываемой системе:

1. Доступ к документам из облачного хранилища.
2. Возможность добавления документа в хранилище.
3. Возможность предварительного сжатия документа.
4. Возможность предварительного шифрования данных.
5. Возможность загрузки документов при отсутствии Интернет-соединения в локальное хранилище.

6. При восстановлении соединения с Интернетом загруженные в локальное хранилище документы передать в облачное хранилище.

7. Возможность просмотра сохраненных на устройстве документов при отсутствии Интернет-соединения.

Составим функциональные модели SADT. Как известно, метод функционального моделирования SADT представляет собой совокупность правил и процедур, предназначенных для построения функциональной модели объекта какой – либо предметной области.

Рис. 1. Функциональный блок и интерфейсные дуги

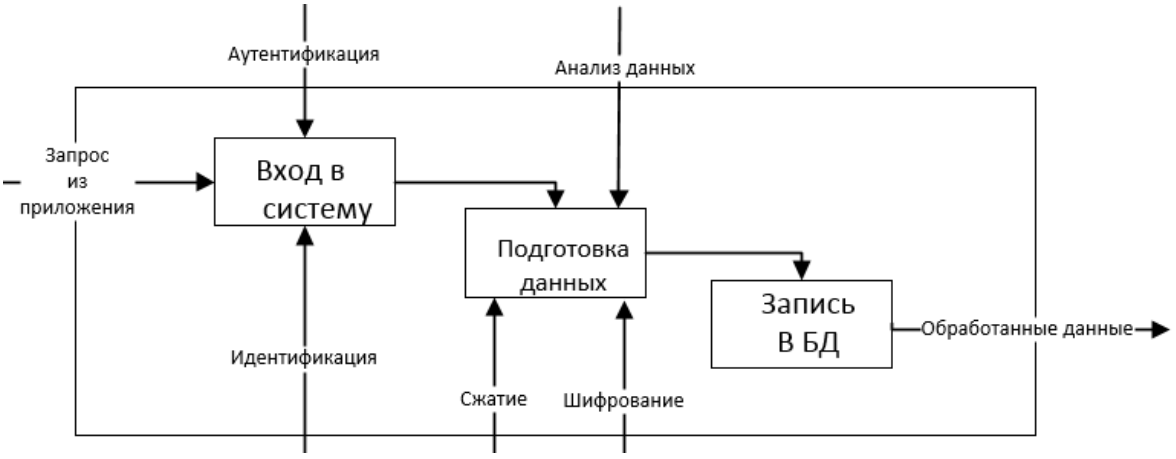


Рис. 2. Структура SADT-модели

Еще на стадии проектирования мобильного приложений перед разработчиками встает вопрос выбора способа реализации приложения. Разрабатывать ли мобильное приложение независимо для разных платформ, или использовать кроссплатформенные средства?

Так как в постановке задачи указаны несколько платформ для разрабатываемого приложения, то логично использовать кроссплатформенную разработку. В этом случае будут затрачены минимальные ресурсы для на разработку и сопровождение мобильного приложения.

Кроссплатформенный подход предполагает унификацию большей части программного кода приложения, его независимость от последующего выбора платформы. Как правило кроссплатформенная разработка подразумевает использование специальных утилит (фреймворков) для создания приложения на основе единой кодовой базы.

Рассмотрим существующие кроссплатформенные технологии в таблице 1.

Таблица 1

	Языки	Поддерживаемые платформы	Open source	UI
Xamarin	C#, Xaml	iOS, Android, Windows Phone and Windows 8/RT, Tizen	-	Native
Unity	C#, UnityScript, Boo	Android, iOS, Windows Phone, Tizen, PS 4, Xbox One	-	UI Canvas
Ionic	JavaScript, HTML, CSS	Android, iOS, Windows Phone, Blackberry, WebOS, Symbian, Bada, Ubuntu, Firefox OS.	+	Web
Flutter	Dart	Android, iOS	+	Native
React Native	ReactJS	Android, iOS	+	Web

Как видно из таблицы, Ionic будет идеальным выбором в том случае, если нужно разработать интерфейс приложения для небольшой аудитории, например, какое-то корпоративное решение для внутренних задач компании. Работа с фреймворком требует от команды опыта написания веб-приложений с помощью технологий JavaScript, CSS и HTML.

На рисунке 3 показана схема взаимодействия разрабатываемого приложения с облачным сервисом. Воспользовавшись фреймворком Ionic, соберем приложения под необходимые платформы. Используя встроенные возможности языка JavaScript можно отправлять запросы из приложения в облачное хранилище для обмена данными.

В соответствии со схемой на рисунке 2 далее необходимо реализовать механизмы шифрования и сжатия.

Алгоритмы шифрования делятся на два больших класса: симметричные (AES, ГОСТ, Blowfish, CAST, DES) и асимметричные (RSA, ElGamal). Симметричные алгоритмы шифрования (или криптография с секретными ключами) основаны на том, что отправитель и получатель информации используют один и тот же ключ. В асимметричных алгоритмах (или криптографии с открытым ключом) для шифрования информации используют один ключ (открытый), а для расшифровки – дру-

гой (секретный). Эти ключи различны и не могут быть получены один из другого.

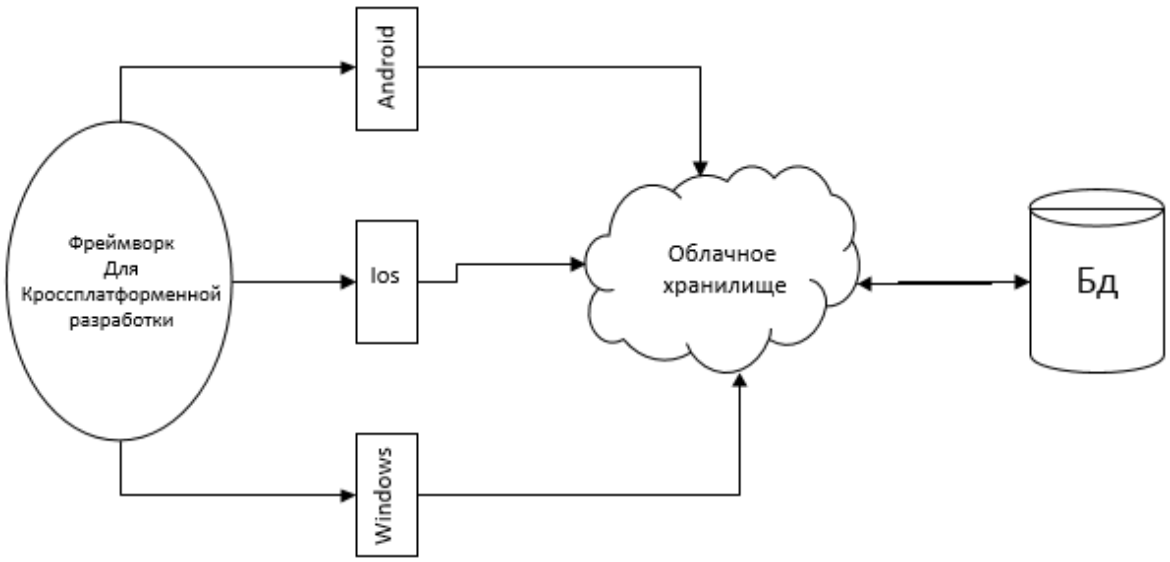


Рис. 3. Схема взаимодействия приложения с облачным сервисом

Механизм шифрования должен работать на устройстве пользователя перед передачей на сервер. При такой архитектуре небезопасно размещать секретный ключ на устройстве пользователя. Вместо этого воспользуемся стойким асимметричным алгоритмом RSA, секретный ключ которого будет храниться на сервере, тогда как открытые ключи будут храниться в памяти телефона пользователей приложения.

RSA — аббревиатура от фамилий Rivest, Shamir и Adleman — криптографический алгоритм с открытым ключом, основанный на вычислительной сложности задачи факторизации больших целых чисел.

Рассмотрим существующие алгоритмы сжатия информации.

Наиболее распространенный дистрибутив 7z содержит несколько алгоритмов сжатия. Проанализируем их и определим, какой алгоритм больше подходит для нашей конкретной задачи.

Формат ZIP поддерживает разные методы сжатия (Deflate, BZip2, LZMA, LZMA2, PPMd). Сравним описанные методы на картинке размером ~700КБ.

По графикам видно, что наилучшее сжатие достигается с помощью алгоритма PPMd, однако наибольшая скорость (что очень важно для нашей задачи) достигается с помощью алгоритма Deflate, который занимает второе место по уровню сжатия. Скорость сжатия актуальна, т.к. файлов большого размера может быть несколько и сервер, возможно, не справится с объемом передаваемых данных. Поэтому в приложении используем алгоритм Deflate.

Составим блок-схему взаимодействия полученного приложения с облачным сервисом, представленную на рисунке 6.

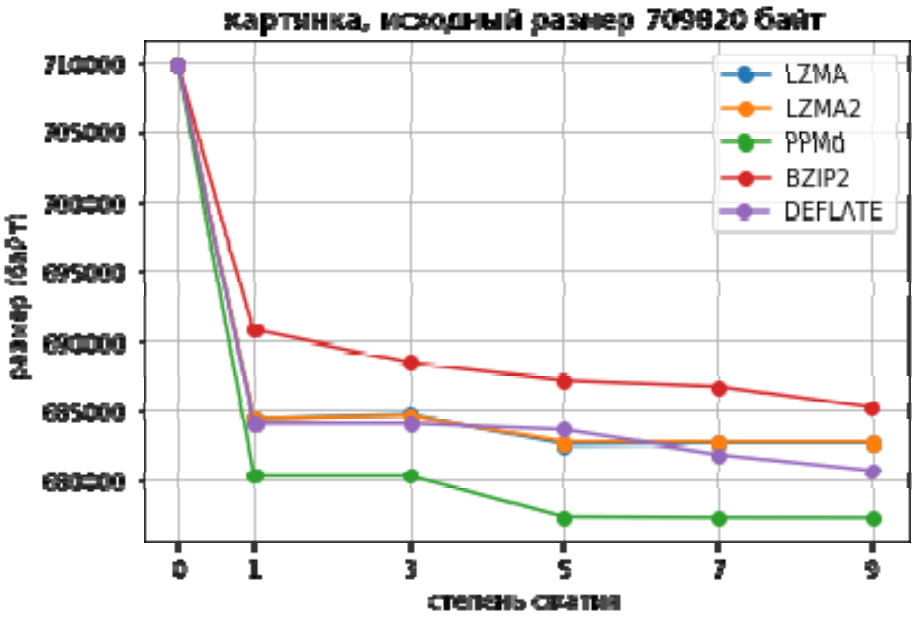


Рис. 4

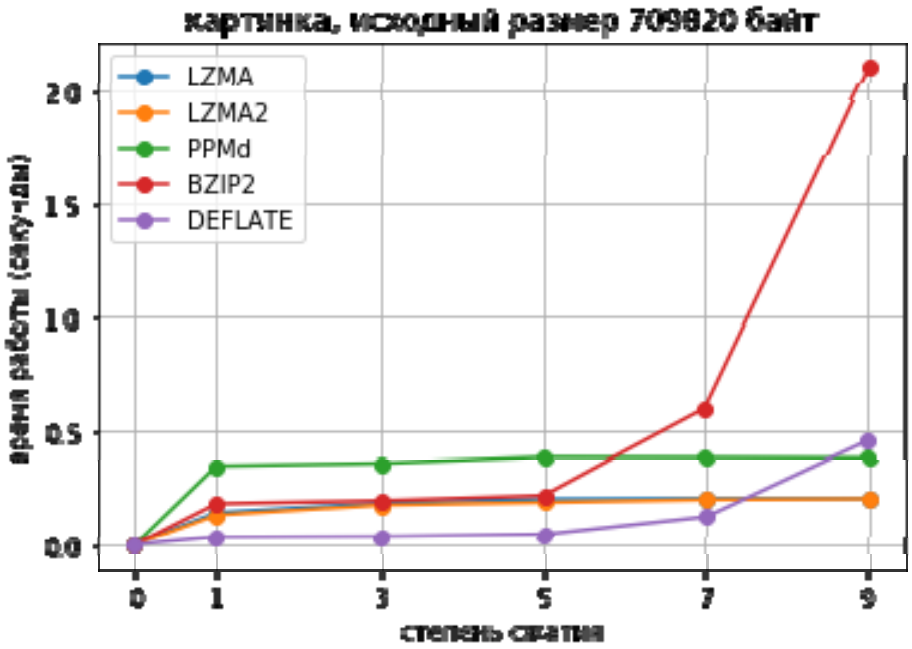


Рис. 5

Приложение позволит получать и просматривать данные из облачного хранилища. Перед загрузкой документов на сервер существует возможность зашифровать конфиденциальные данные, а также сжать их для экономии места.

Таким образом, используя технологии кроссплатформенной разработки, можно реализовать приложение для трёх разных мобильных платформ. Используя наиболее подходящие алгоритмы шифрования и сжатия данных, можно загружать секретные данные на облачный сервер, не беспокоясь об их безопасности.

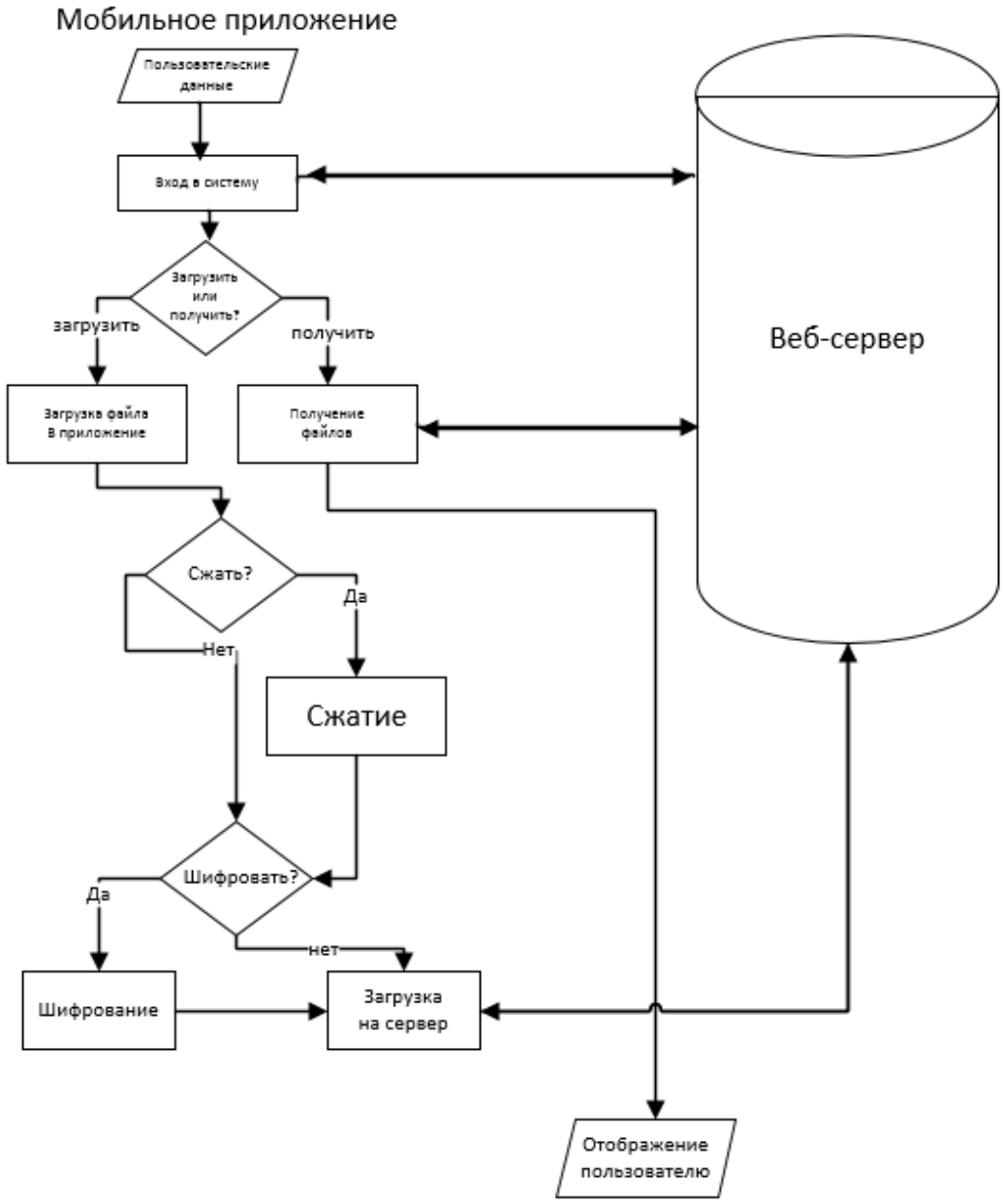


Рис. 6. Схема взаимодействия полученного приложения с облачным сервисом

Библиографический список

1. Шемет, В. С. Обзор методов шифрования / Владислав Сергевич Шемет, Андрей Размикович Айдинян // Символ науки. – 2016. – № 6-1.

2. Захаров, В. Б. Проблемы выбора языков программирования при разработке кроссплатформенных приложений / Виктор Борисович Захаров, Михаил Георгиевич Мальковский, Артем Игоревич Мостяев // International Journal of Open Information Technologies. – 2017. – № 7.

3. Румянцев, Е. П. Обзор инструментальных средств для разработки мобильных приложений / Е. П. Румянцев // Научное обозрение. Технические науки. – 2017. – № 1. – С. 88–92;

4. Петрянин, Д. Л. Сжатие текстовых данных / Д. Л. Петрянин, Н. К. Юрков // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. – 2014. – Т. 1. – С. 328–330.

МЕТОДЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ПО ГОЛОСОВЫМ КАНАЛАМ В СФЕРЕ ОХРАННЫХ СИСТЕМ

Д. В. Крюкова, Ю. Ф. Захарова, О. В. Захаров

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: kryukova110@ya.ru

На сегодняшний день, производители оборудования мобильной связи выпускают специализированные GSM-модемы для построения на их основе беспроводных систем безопасности, повышая надежность работы и предоставляя дополнительные возможности по работе с сервисами в охранных системах.

В данной статье будет рассматриваться принцип построения сигнала, способного переносить информацию; модулируя определенным образом этот сигнал, можно с его помощью передавать цифровые данные по голосовому каналу связи GSM. В данном случае модулированным сигналом является синтезированная речь с заложенной в нее полезной информацией, а средой передачи выступает голосовой канал GSM сети.

Использование голосового канала GSM сети для передачи информации не может конкурировать в скорости со специализированными технологиями передачи данных, однако позволит использовать ряд преимуществ: низкую стоимость вызовов, а также высокую стабильность и надежность передачи.

Обработка речи осуществляется в рамках принятой системы прерывистой передачи речи. Система прерывистой передачи речи (DTX) обеспечивает включение передатчика только тогда, когда пользователь начинает разговор и отключает его в паузах и в конце разговора. DTX управляется детектором активности речи (VAD) [1], который обеспечивает обнаружение и выделение интервалов передачи речи с шумом и шума без речи даже в тех случаях, когда уровень шума соизмерим с уровнем речи. В состав системы прерывистой передачи речи входит также устройство формирования комфортного шума, который включается и прослушивается в паузах речи, когда передатчик отключен. Экспериментально показано, что отключение фонового шума на выходе приемника в паузах при отключении передатчика раздражает абонента и снижает разборчивость речи, поэтому применение комфортного шума в паузах считается необходимым. DTX процесс на приемнике включает также интерполяцию фрагментов речи, потерянных из-за ошибок в канале.

Структурная схема процессов передачи данных по речевому каналу в стандарте GSM (без учета работы VAD) показана на рис. 1.

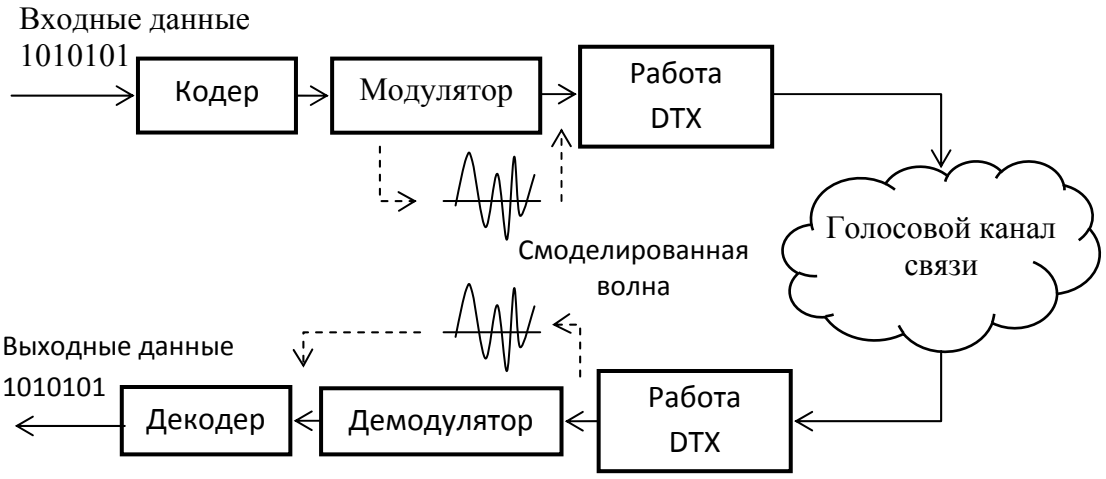


Рис. 1. Структурная схема процесса передачи данных по речевому каналу

Методом работы блоком модулятора и демодулятора является частотная модуляция [2]. Выбор метода модуляции является вопросом отдельной работы, поэтому в данной статье рассматриваться не будет.

Выбор метода кодирования

Для оценки эффективности кодирования, прежде всего, необходимо определиться со структурой передаваемой информации. В нашем случае будем исходить из стандарта [2]. Структура представлена на рис. 2. В данном случае это пакет закодированных речевых данных.

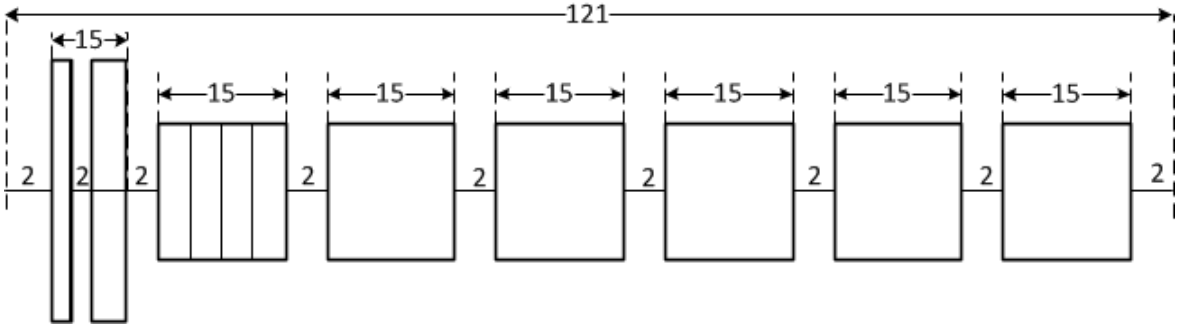


Рис. 2. Структура пакета данных на передаче в канал

При богатстве выбора кодов, исправляющих ошибки, чаще всего применяют коды Хемминга или БЧХ. Ограничениями в применении других кодов являются: работа с блочными ошибками (сверточные коды), сложные алгоритм декодирования или работа с недвоичной структурой. В данном случае воспользуемся широко известным подкласс недвоичных кодов БЧХ – кодом Рида-Соломона. Этот код можно определить как множество кодовых слов, компоненты которых равны значениям некоторых определенных многочленов. Алгоритмы декодирования кодов Рида-Соломона близки к алгоритмам для двоичных кодов БЧХ [3].

Воспользуемся для реализации 6-ти разрядным кодом Рида-Соломона со следующими параметрами. Код РС(64) над полем GF(64) соответственно. Длинна информационного сообщения составляет 34 бит, CRC проверка – 2 бита, количество проверочных – 26 бит. Данный код исправляет 13 ошибок.

Рассмотрим модификацию с исправлением ошибок и стираний. Код с минимальным расстоянием d^* позволяет декодировать любую конфигурацию, содержащую v ошибок и ρ стираний [4], при условии, что

$$d^* \geq 2v + 1 + \rho$$

Возможно также применение каскадной кодовой конструкции с алгоритмом нахождения стираний и ошибок, где в качестве внутреннего кода выступает код Голея с параметрами: 12 информационных и 12 проверочных бит. В общем случае, код Голея способен справлять 3 ошибки, при обнаружении 4 и более ошибок их локаторы поступают в качестве стираний на внешний код. В качестве внешнего – код Рида-Соломона с параметрами, принимающего неисправленные внутренним кодом ошибки как локаторы стираний для алгоритма декодирования.

Для декодирования кода Рида-Соломона использовалась стандартная процедура с модификацией частотного декодера с применением обратного преобразования Фурье для упрощения вычислений.

В качестве исходных сообщений использовались заранее записанные речевые файлы. Для искажения канальных файлов использовались GSM AMR кодеки разной скорости. Пример искаженного канального речевого файла представлен на рис. 3.

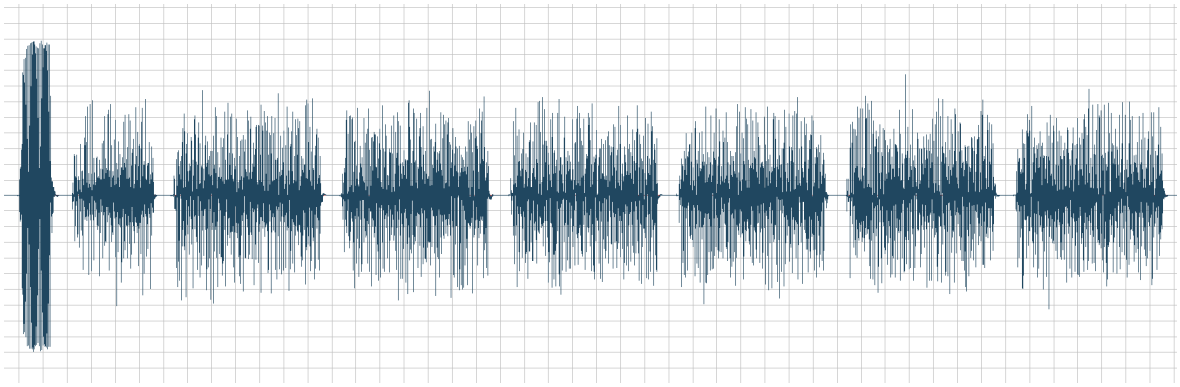


Рис. 3. Искаженный канальный блок файла

Библиографический список

1. Крюкова, Д. В. Цифровая обработка канальных сигналов в системах мобильной связи GSM / Д. В. Крюкова, Ю. Ф. Захарова, О. В. Захаров // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. молодых спе-

циалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 28–31 мая 2018 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 218–222.

2. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами / Л. Е. Варакин. – Москва : Радио и связь, 1985. – 384 с.

3. Foney, G. D. On Decoding BCH Codes / G. D. Forney // IEEE Trans Info Theory. – 1965. – Vol. IT-11. – P. 393–403.

4. Блейхут, Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки / Р. Блейхут ; пер. с англ. И. И. Грушко, В. М. Блиновский ; под ред. К. Ш. Зигангирова. – Москва : Мир, 1986. – 576 с.

ОБОБЩЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КЛАССА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА НА ЯЗЫКЕ ВЫСОКОГО УРОВНЯ С ПОДДЕРЖКОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИМОРФИЗМА ПОДТИПОВ

Л. В. Яблокова, Д. Е. Яблоков*

Самарский национальный исследовательский университет,
г. Самара, Россия;
*ООО «ИнтеллектСофт»,
г. Самара, Россия
E-mail: yablokova@gmail.com; dyablokov@gmail.com

Введение

Одним из основных преимуществ обобщённого программирования является то, что информация о параметре типа сохраняется в течение всего жизненного цикла элемента программы. Это позволяет уменьшить количество дублирования одной и той же структуры данных или метода для различных типов, что существенно влияет на структурную целостность кода и эффективность его использования. Научные и инженерные приложения, насыщенные математическими абстракциями, кажутся идеально подходящими кандидатами для применения обобщённого подхода. Однако есть много проблем [1, 2], возникающих при использовании обобщений, связанных в первую очередь с синтаксическими и семантическими ограничениями для языков программирования не в полной мере поддерживающих обобщённую парадигму. Результатом проявления таких проблем, в большинстве случаев, является отказ от обобщённой математики с заменой обобщённого представления одним из встроенных типов, с достаточно широким диапазоном значений [3]. В статье рассматривается подход для создания обобщённых математических абстракций, позволяющий при единственном определении применять их к множеству типов данных. На примере класса комплексного числа представлена стратегия проектирования и реализации на языке C#, повышающая эффективность использования обобщённых компонентов в вычислительных приложениях, где задействован математический аппарат.

Постановка задачи

С учетом того, что в настоящий момент все большую популярность для научных исследований и вычислительных экспериментов продолжает набирать язык C# [4] нельзя не упомянуть используемые в нём механизмы обобщения (generics). Вне всяких сомнений данная технология внесла большой вклад в плане выразительности, безопасности типов и производительности, но она также не лишена и некоторых отрицательных особенностей [1]. Среди других недостатков обобщений в чисто объектно-ориентированных языках самым весомым продолжает оставаться недоступность информации о свойствах параметра типа во время компиляции [1, 2, 4]. При написании кода, связанного с математическими расчетами, было бы неплохо, чтобы приведенный пример (рис. 1) работал бы для любых типов данных, вне зависимости от того являются ли они встроенными или определены пользователем.

```
1  struct Complex<T>
2  {
3        public T Re{get; set;}
4        public T Im{get; set;}
5        /* ... */
6        public static Complex<T> operator + (Complex<T> lhs, Complex<T> rhs)
7        {
8              return new Complex<T>()
9              {
10                   Re = lhs.Re + rhs.Re, //Error
11                   Im = lhs.Im + rhs.Im  //Error
12                   // Operator '+' cannot be applied to operands
13                   // of type 'T' and 'T'
14             };
15       }
16 };
```

Рис. 1. Фрагмент кода неработающей обобщённой реализации комплексного числа

Вопрос о невозможности применения множества типов данных к одной универсальной конструкции в языке C# достаточно широко представлен в литературных источниках [5]. В них приводятся различные варианты реализаций обобщённых математических структур [1, 2, 4, 5], но, в основном, все они страдают от нечетко сформированной семантики работы обобщённых компонентов или не полностью определённых концептуальных границ решения. В рамках данной работы, на примере обобщённой реализации класса комплексного числа, представлен подход к созданию математических абстракций, способных в качестве параметров типов принимать любые типы данных, семантика которых допускает следующие арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление.

Параметрический полиморфизм подтипов

Параметрическим полиморфизмом подтипов называется свойство объектно-ориентированных языков, используемое при обобщённом программировании, для установки ограничений параметров типов в универсальных объявлениях. Данная форма полиморфизма является симбиозом параметрического или статического полиморфизма [6] и полиморфизма подтипов или, как еще его называют, динамического или ограниченного полиморфизма. В зарубежной литературе параметрический полиморфизм подтипов имеет название F-bounded polymorphism [7] и для языка C# применяется, например, при параметризации поведения обобщённых компонентов. В русскоязычных работах авторы также оперируют этим понятием для формализации способов описания обобщённых конструкций в целом [8] или при разработке универсальных, расширяемых библиотек моделей обобщённых концепций для создания алгоритмов с развитой семантикой обработки данных [9].

В данной работе авторы связывают его применение с заданием ограничений для определения семейств типов, имеющих общий синтаксис, наследующих обобщённому интерфейсу комплексного числа (рис. 2), и способных использоваться в качестве параметров типов.

```
1  interface IConmplex<T>
2  {
3        T Re{get; set;}
4        T Im{get; set;}
5  };
```

Рис. 2. Пример кода обобщённого интерфейса комплексного числа

Допустимые операции

Применяя обобщенный подход, основная идея которого состоит в использовании наиболее общих формулировок, возможно получение наиболее минимального набора элементарных операций в виде обобщённой концепции, которой вполне достаточно для реализации требуемых математических действий (рис. 3).

```
1  interface INumConcept<T>
2  {
3        T Add(T arg1, T arg2);
4        T Mul(T arg1, T arg2);
5        T Div(T arg1, T arg2);
6        bool Et(T arg1, T arg2);
7        bool Lt(T arg1, T arg2);
8        T Abs(T arg);
9        T Neg(T arg);
10       T Zero { get; }
11       T One { get; }
12 };
```

Рис. 3. Пример кода обобщённой концепции универсального числового типа

Как видно из примера (рис. 3) обобщённая концепция `INumConcept<T>` содержит в своем описании несколько операций и свойств, способных, в определенных сочетаниях, производить специализированные вычисления.

Для реализации класса комплексного числа с точки зрения обобщённого подхода от типов, представляющих мнимую или вещественную часть требуется поддержка:

1. Коммутативных и ассоциативных операций сложения и умножения (строки 3-4).
2. Дистрибутивности этих операций.
3. Операции деления (строка 5).
4. Операций сравнения по критерию «эквивалентность» (строка 6) и критерию «меньше чем» (строка 7).
5. Унарных операций получения абсолютного значения (строка 8) и отрицания (строка 9).
6. Двух нейтральных элементов аддитивной и мультипликативной групп (строки 10-11).

Базовая абстракция и класс комплексного числа

По предварительному условию при исследовании возможности обобщённого представления класса комплексного числа нужно предусмотреть выполнение четырёх основных арифметических операций: +, –, * и /. Для комплексных чисел $z_1 = a + ib$ и $z_2 = c + id$, программная реализация первых трёх операций достаточно тривиальна. Сложность представляет только деление, правильность которого зависит от значений знаменателя в слагаемых $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ и $i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. Согласно [10] выполнение может завершиться с ошибкой или привести к неверному результату, связанному с изменением точности, при достаточно большой или малой вещественной, или мнимой части. Поэтому авторами использован улучшенный и отказоустойчивый алгоритм [11], который никогда не завершается неудачей и выдает результат с приемлемой точностью (рис. 4).

Оценивая качество проектируемой абстракции, важно ориентироваться на несколько показателей, часть из которых оказывают существенное влияние на процесс анализа и спецификацию требований. Они отвечают за целенаправленное и правильное взаимодействие вычислительного базиса разрабатываемого компонента с другими объектами (рис. 5).

Заключение

В работе предложено решение по созданию обобщённых математических абстракций на примере класса комплексного числа. Введено понятие концепции универсального числового типа, базирующееся на определениях абстракций общей алгебры и сочетающее в себе свойства

моноидов, абелевых групп и колец. Создана базовая обобщённая реализация, содержащая в своём описании требуемые арифметические действия для комплексных чисел и ретранслирующая их в термины примитивных бинарных операций на уровень конкретной модели концепции типа, представляющего вещественную и мнимую части. Можно сказать, что суть подхода заключается в экстернализации операций, за пределы определения самой структуры данных, с последующим делегированием исполнения экземпляру некоторой обобщённой концепции.

```
abstract class ComplexBase<C, T> : IComplex<T>
	where C : IComplex<T>
{
	/* other methods and properties */
	protected virtual C Div(C other)
	{
		if (!_cpt.Lt(_cpt.Abs(other.Re), _cpt.Abs(other.Im)))
			return DivExt(Re, Im, other.Re, other.Im, false);
		return DivExt(Im, Re, other.Im, other.Re, true);
	}
	protected virtual C DivExt(T a, T b, T c, T d, bool neg)
	{
		var r = _cpt.Div(d, c);
		var t = _cpt.Div(_cpt.One, _cpt.Add(c, _cpt.Mul(d, r)));
		var re = DivExt(a, b, c, d, r, t);
		var im = DivExt(b, _cpt.Neg(a), c, d, r, t);
		return Create(re, neg ? _cpt.Neg(im) : im);
	}
	protected virtual T DivExt(T a, T b, T c, T d, T r, T t)
	{
		if (!_cpt.Et(r, _cpt.Zero))
		{
			var br = _cpt.Mul(b, r);
			if (!_cpt.Et(br, _cpt.Zero))
				return _cpt.Mul(_cpt.Add(a, br), t);
			return _cpt.Add(_cpt.Mul(a, t), _cpt.Mul(_cpt.Mul(b, t),
r));
		}
		return _cpt.Mul(_cpt.Add(a, _cpt.Mul(d, _cpt.Div(b, c))), t);
	}
};
```

Рис. 4. Фрагмент кода базовой абстракции комплексного числа

```
class Complex<T> : ComplexBase<Complex<T>, T>
{
	protected override Complex<T> Create(T re, T im) =>
		new Complex<T>(_cpt) { Re = re, Im = im };
	public Complex(INumConcept<T> cpt) => _cpt = cpt;
	public static Complex<T> operator + (Complex<T> lhs, Complex<T> rhs)
=>
		lhs.Add(rhs);
	/* other arithmetic operators */
};
```

Рис. 5. Фрагмент кода обобщённой реализации класса комплексного числа

Основной акцент делался на преодолении технологических недостатков механизмов обобщений, используемых в C#. Авторы надеются, что эта и подобные ей работы смогут повлиять на технологию параметризации типов в C#, что позволит в полной мере использовать этот язык при конструировании программ с обобщённым математическим аппаратом.

Все приведённые в работе фрагменты кода, за исключением (рис. 1), доступны для скачивания и ознакомления [12].

Библиографический список

1. Скит, Д. C# для профессионалов. Тонкости программирования / Д. Скит. – Москва : Вильямс, 2014. – 602 с.
2. Nash, T. Accelerated C# / T. Nash. – New York : APRESS, 2010. – 650 p.
3. URL: https://numerics.mathdotnet.com/api/MathNet.Numerics/Complex32.htm
4. Passos, W. Numerical methods, algorithms, and tools in C# / W. Passos. – CRC Press, 2009. – 600 p.
5. Iosup, A. Performance Analysis of Generics in Scientific Computing / A. Iosup, M. Yigitbasi, S. Ostermann, R. Prodan // Transactions on Parallel and Distributed Systems. – 2011. – Vol. 22(6). – P. 931-945.
6. Vandevoorde, D. C++ Templates: The Complete Guide / D. Vandevoorde, N. M. Josuttis, D. Gregor. – Boston : Addison–Wesley, 2017. – 832 p.
7. Canning, P. F-bounded polymorphism for object-oriented programming / P. Canning // Proc. of 7 Conf. on Functional Programming Languages and Computer Architecture. – Springer, 1994.
8. Яблоков, Д. Е. Влияние способа представления данных с помощью линейных диапазонов на эффективность алгоритмов / Д. Е. Яблоков // МКМ. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 141–147.
9. Stepanov, A. From mathematics to generic programming / A. Stepanov, E. Rose. – Boston : Addison–Wesley, 2015. – 293 p.
10. Baudin M. Error bounds of complex arithmetic / M. Baudin // NISP Toolbox Manual. – 2011. – June. – P. 1–30.
11. Baudin, M. A Robust Complex Division in Scilab / M. Baudin, R. Smith // CoRR. – 2012 – 12 Oct.
12. URL: https://bitbucket.org/dyablokov-SSAU/mkm2019/src

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

МОТИВАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ И СОЗДАНИЕ УСЛОВИЙ ДЛЯ ЕЕ РАЗВИТИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С. Ю. Варлашина, Н. В. Наземнова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: math@pnzgu.ru

В настоящее время все более возрастает необходимость в специалистах с высоким уровнем общего развития, профессиональной компетентности и творческих способностей. Это предопределяет изменение в мотивационной сфере образовательного процесса. Поэтому одной из наиболее актуальных проблем современного профессионального образования является формирование высокомотивированной личности студента, способной жить и трудиться в изменяющихся экономических условиях.

В словаре С.И. Ожегова мы читаем, что «мотив» – это побудительная причина, повод к какому-то действию. Чтобы разобраться, что является мотивом для учащихся при решении задач необходимо ответить на вопросы: «Что такое мотивация?», «Что такое задача?».

Психологи термин «мотивация» определяют через побуждение, вызывающее активность личности и определение ее направления. Это определение связывает три вида психологических явлений:

1) мотивация – это повод, активизирующий личность;

2) мотивация – это причина выбора определенного поведения;

3) мотивация – это средство самоконтроля человека.

Любая мотивация связана с потребностями человека, направлена на их удовлетворение. Мотивы отличаются друг от друга видом потребности, а также конкретным содержанием деятельности, в которой они реализуются.

Учебный процесс – это сложный вид деятельности, поэтому мотивы могут сливаться в едино, формируя сложные мотивационные системы.

Между тем известно, что более продуктивной является внутренняя мотивация. Она порождается конкретной предметной деятельностью и непосредственно связана именно с данной учебной дисциплиной и ее содержанием. Но именно она предметна, конкретна, хотя и более слож-

ная для формирования, требует больших усилий и подготовки, а потому часто остается в тени учебной деятельности или совсем не используется.

«Задачей» в геометрии можно назвать любой математический вопрос, для ответа на который учащемуся недостаточно простого воспроизведения аксиомы или теоремы. Существуют задачи, решение которых требует от студента расширение существующей теории. Вся трудность в решении задач состоит в выборе теорем, аксиом, в комбинировании их во введении разного рода дополнительных преобразований, в дополнении чертежа. Иногда вся трудность сводиться к математическому оформлению условий, к переводу их на общепринятый математический язык.

Решение задач имеет целью развития математического мышления и является поводом к какому-то действию, то есть мотиву. Основной мотивационный фактор в учебной деятельности студента по геометрии – это стремление связать изученные аксиомы и теоремы с решением практических задач.

Для математического развития учащихся, для развития их творческого мышления гораздо полезнее одну задачу решить несколькими способами, чем несколько однотипных задач одним способом.

Рассматривая решение задач несколькими способами по геометрии, преподаватель должен ориентировать студентов на поиски красивых, изящных решений, способствуя эстетическому воспитанию учащихся и повышению их математической культуры.

При отыскании различных способов решения задач у студентов формируется познавательный интерес, развиваются творческие способности, вырабатываются исследовательские навыки. После нахождения очередного метода решения задачи учащийся, как правило, получает большое моральное удовлетворение.

Рассмотрим методику формирования мотивов при обучении решению задач несколькими способами в геометрии координатным и векторным методами.

Проанализируем координатный метод решения геометрических задач. Использование этого метода предполагает выполнение трех этапов: 1) перевод задачи на координатный язык; 2) преобразование аналитического выражения; 3) обратный перевод с координатного языка на язык, в терминах которого сформирована задача. При решении таких задач «побуждение» учащегося направлено на овладение следующими умениями: строить точку по ее координатам; вычислять координаты заданных точек; уметь вводить систему координат; вычислять расстояние между точками, с заданными координатами; составлять уравнения фигур по их свойствам; видеть за уравнением конкретный геометрический образ; преобразовывать алгебраические равенства.

С точки зрения перехода от элементарной геометрии к аналитической полезно разобрать следующую задачу. В ходе решения учащиеся

повторили признак перпендикулярности прямой к плоскости, теорему Пифагора, формулы вычисления объемов и наконец, способы аналитического задания плоскости.

Задача. В правильной четырехугольной пирамиде *PABCD* сторона основания равна *3*, высота *2*. Найдите расстояние от вершины *A* до грани *PCD*.

Решение. 1 способ. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки *A* на плоскость *PCD*, расстояние от нее до плоскости *PCD* равно расстоянию от точки *A* до той же плоскости.

Выберем теперь точку *M* - середину ребра *AB* и заметим, что

$$\rho(A, PCD) = \rho(M, PCD).$$

Чтобы построить перпендикуляр *MK* из точки *M* на грань *PCD*, найдем осевое сечение *PMN* пирамиды, проведя $MN \perp CD$, тогда и $PN \perp CD$. Ясно, что $CD \perp (PMN)$. Грань *PCD* проходит через отрезок *CD*, следовательно, $(PCD) \perp (PMN)$. В таком случае перпендикуляр из точки *M* на грань *PCD* принадлежит плоскости *PMN* и является перпендикуляром к линии пересечения плоскостей *PMN* и *PCD*. Заметим, что треугольник *PCD* изображается без искажения, так как плоскость *PMN* параллельна плоскости изображений. Поэтому угол на рисунке не искажается: $\angle MKN = 90°$ Вычислим $\rho(M, PCD) = MK$. Из треугольника *PHN*:

$$PN = \sqrt{PH^2 + HN^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2};$$

$$S_{PMN} = \frac{1}{2} MN \cdot PH = \frac{1}{2} PN \cdot MK \Rightarrow MK = \frac{MN \cdot PH}{PN} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{5} = 2,4.$$

2 способ. Расстояние от точки *A* до плоскости равно длине высоты пирамиды *APCD*, проведенной из вершины *A* к грани *PCD*. Вычислим сначала объем пирамиды *PABCD:*

$$V_{PABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot PH = 6$$

Эта пирамида состоит из двух равных пирамид с основаниями *ACD* и *ABC* и вершиной *P*, т.е.

$$V_{APCD} = \frac{1}{2} V_{PABCD} = 3,$$

но

$$V_{APCD} = \frac{1}{3} S_{PCD} \cdot \rho(A, PCD) = 3. \qquad (1)$$

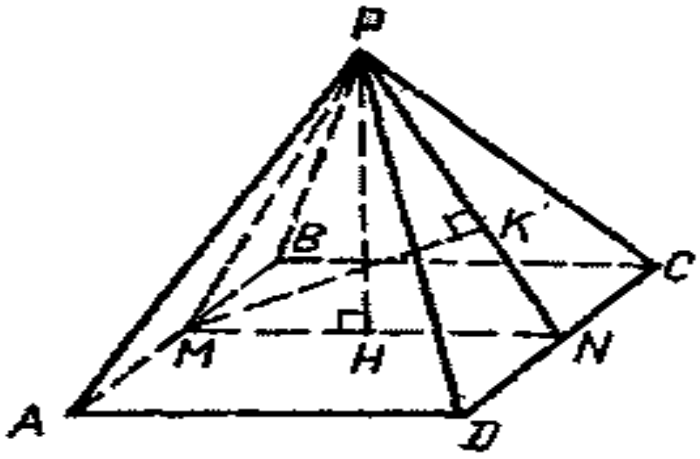


Рис. 1

Выше было вычислено, что $PN = \frac{5}{2}$, тогда

$$S_{PCD} = \frac{1}{2} PN \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 = \frac{15}{4}.$$

Таким образом, подставляя найденное значение для S_{PCD} в формулу (1), составляем уравнение относительно ρ:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} \cdot \rho\left(A, PCD\right) = 3.$$

Отсюда $\rho\left(A, PCD\right) = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

3 способ. Применим метод координат. Свяжем с пирамидой декартову прямоугольную систему координат, поместив точку начала отсчета *H* в центр квадрата *ABCD* и направив ось абсцисс вдоль луча *HA*. Тогда ось ординат пойдет вдоль луча *HD*, а третья ось - вдоль луча *HP*. Найдем координаты точек *A, C, D,P* в этой системе, учитывая, что $AC = 3\sqrt{2}$, $HP = 2$ и $HD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$A\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, 0\right); C\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, 0\right); D\left(0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right); P\left(0, 0, 2\right).$$

Используя уравнение плоскости в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Запишем уравнение плоскости PCD:

$$\frac{x}{-\frac{3}{2}\sqrt{2}} + \frac{y}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} + \frac{z}{2} = 1 \Rightarrow -x + y + \frac{3}{4}\sqrt{2z} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-4y-3\sqrt{2z}+6\sqrt{2}=0\,.$$

Расстояние от точки $A(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости PCD находим по формуле:

$$\rho=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости.

В данном случае $x_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $y_0=z_0=0$; $A=4$, $B=4$, $C=-3\sqrt{2}$, $D=6\sqrt{2}$. Тогда

$$\rho(A,PCD)=\frac{\left|4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}+0+0+6\sqrt{2}\right|}{\sqrt{16+16+18}}=\frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=2,4.$$

При решении этой задачи часть учащихся с неохотой приступают к поиску ее решений. Главная причина отсутствия мотивации, по нашему мнению, состоит в том, что данная категория студентов характеризуется низким уровнем сформированности умения выделять существенные связи в условии и требовании задачи. Учащиеся не владеют таким методами решений, как: 1) метод «соотношения», он сводится к связыванию изучаемого материала с прежними знаниями и отдельных частей нового друг с другом; 2) метод «реконструкции», в процессе запоминания, и последующего воспроизведения материал может подвергаться изменениям; 3) метод «классификации», предполагает сопоставление на основе учета общих признаков объектов и закономерных связей между ними, которые позволяют ориентироваться в многообразии объектов, и являются источником знаний о них; 4) метод «систематизации» - то есть расположение объектов в определенном порядке, установление определенной зависимости между ними.

Для выработки правильного понимания учащимися поставленной геометрической задачи можно рекомендовать соблюдение следующих требований:

1. начинайте изучение условия задачи с аккуратно выполненного чертежа (рисунка). Помните, что правильное графическое представление условия задачи означают по существу четкое, ясное и конкретное представление о всей задачной ситуации в целом;

2. представьте ясно и детально все основное, связанное с данной задачей. Обстоятельно выясните, что дано, что надо найти; выделите при этом главное в тексте условия задачи и сконцентрируйте на нем своё

внимание. Выделите на чертеже данные и искомые величины различными яркими цветами;

3. проверьте тщательно каждое выдвигаемое в процессе решения задачи положение контрольными вопросами вида: что это означает, какие имеются основание для данного утверждения, какую пользу можно извлечь из данного факта?

4. проверьте, однозначно ли сформулирована задача. Нет ли в условии задачи избыточных или недостающих данных?

Первое из этих требований, особенно важно при решении геометрических задач, где наглядный и четкий чертеж позволяет иной раз с первого же взгляда обнаружить возможные пути решения.

Решение задач разными способами осуществляет право студента на выбор решения, даже если оно не является традиционным, у него появляется дополнительная возможность справиться с делом. Когда есть выбор при решении задачи, варианты ее оформления – это делает учащегося свободным, спокойным, появляется возможность его успеха, возникает устойчивость важной для жизни мысли: «Всегда можно найти выход из сложной ситуации».

Сравнение различных решений одной задачи очень поучительно. Опыт работы показывает, что решение одной и той же задачи различными методами естественно вписывается в процесс проведения урока по решению задач. Систематическое использование этого приема дает значительный эффект как при обучении решению задач по геометрии, так и при обучении курсу математики в целом.

Библиографический список

1. Баранова, Е. В. Как увлечь школьников исследовательской деятельностью / Е. В. Баранова, М. И. Зайкин // Математика в школе. – 2004. – № 2.

2. Варлашина, С. Ю. Способы активизации учебной деятельности старшеклассников в процессе их обучения математическим методам распознавания геометрических образов / С. Ю. Варлашина, Н. В. Наземнова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 175–181.

3. Дорофеев, С. Н. Решение геометрических задач векторным методом / С. Н. Дорофеев. – Москва : МПУ, 2000.

4. Наземнова, Н. В. Закономерности обучения старшеклассников распознаванию геометрических образов / Н. В. Наземнова. – Орел : ОГУ, 2007.

5. Родионов, М. А. Формирование поисковой мотивации в процессе обучения математике : учеб. пособие для студентов и учителей. – Пенза : Изд-во ПГПУ, 2001.

6. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – Москва : Просвещение, 2005. – 255 с.

ИЗУЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТУДЕНТАМИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

П. Г. Пичугина, О. В. Болотникова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: polinapichugina@yandex.ru; olgavs3011@yandex.ru

На современном этапе в образовании при подготовке бакалавров по направлениям 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04 при изучении математики всё большая роль отводится её прикладному использованию.Профилирующие дисциплины применяют математический аппарат и математические методы, поэтому в преподавании математики важно соблюсти профессиональную направленность.

Для студентов технических направлений подготовки важное значение представляет раздел «Дифференциальные уравнения», применяемый в решении прикладных задач, так как дифференциальные уравнения выступают математическими моделями различных явлений механики, химических реакций, электрических и магнитных явлений, т.е. объектов исследования будущих инженеров.

Знакомство с дифференциальными уравнениями лучше начать при изучении темы «Неопределённый интеграл».

Далее, при рассмотрении темы «Геометрические и физические приложения определённого интеграла», можно одно из интегральных уравнений, полученных при нахождении геометрической или физической величины, свести к дифференциальному.

В разделе «Дифференциальные уравнения» студентам необходимо усвоить основные понятия и теоремы, научиться определять вид данного уравнения и соответствующий ему способ решения, составлять дифференциальное уравнение при решении прикладных задач.

Затруднения возникают при определении вида дифференциального уравнения первого порядка. Это связано с тем, что все виды уравнений заданы формулами в разной форме: часть из них задаётся в дифференциальной форме, другие содержат производную или являются разрешёнными относительно неё. Кроме этого, существуют уравнения, которые можно отнести к более, чем одному виду. Например, уравнение $y' = k \cdot \frac{y}{x}$ (уравнение с разделяющимися переменными, которое можно отнести также к однородному), значительную часть однородных уравнений можно рассматривать как линейные. Следует показать, что решение методами, соответствующими каждому виду, приведёт к одному и тому же результату, однако важно научиться прийти к результату наиболее рациональным способом.

В работах многих авторов предложены различные способы определения вида дифференциального уравнения. Так, Полюхович Н. В. предлагает схему, основанную на том, что всегда нужно выражать производную. Нами были проверены две схемы, одна из которых определяет вид уравнения, заданного в дифференциальной форме (рис. 1), другая – вид уравнения, разрешённого относительно производной (рис. 2). Проверка показала улучшение результатов студентов, пользующихся схемами.

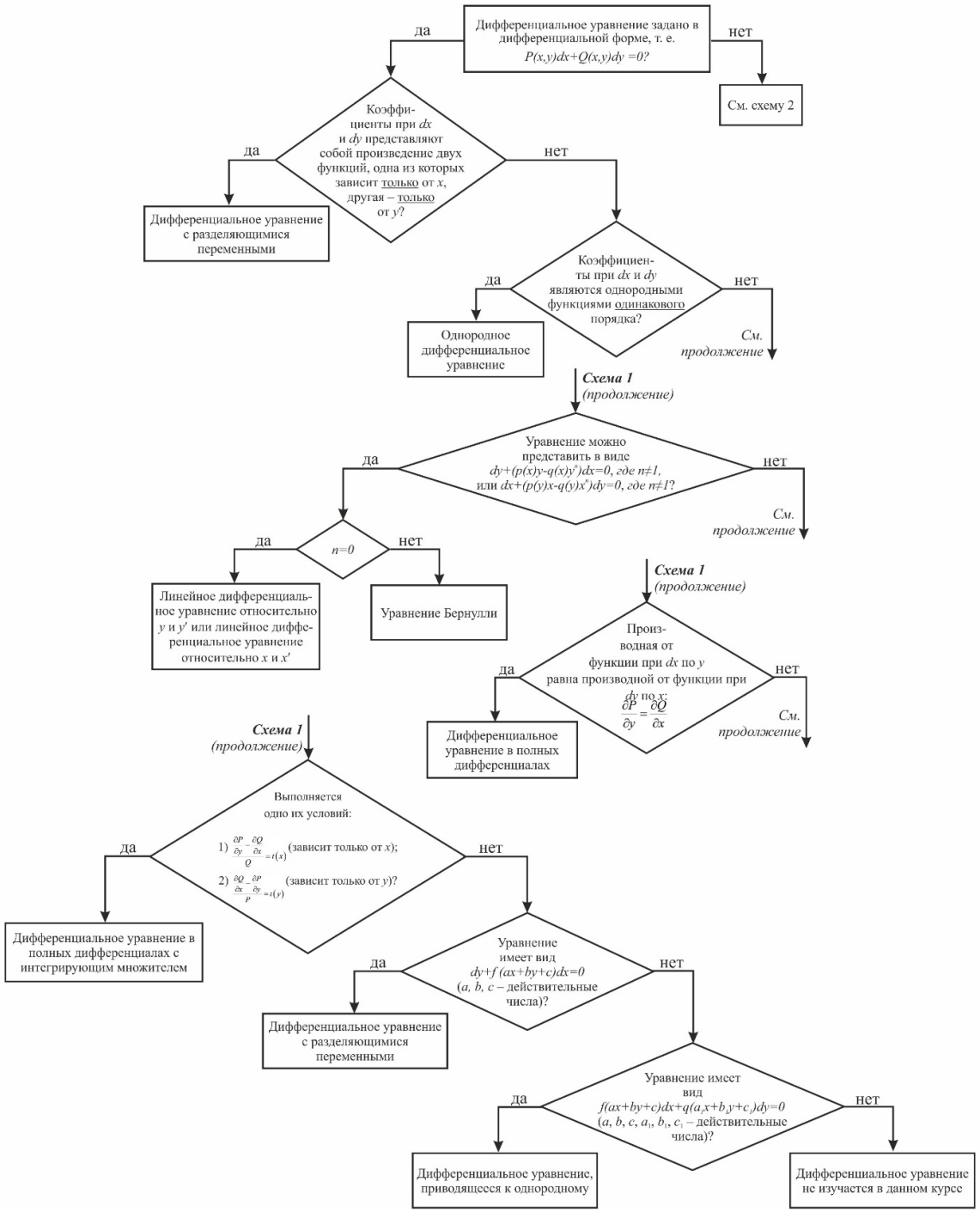


Рис. 1. Определение вида дифференциального уравнения первого порядка, заданного в дифференциальной форме

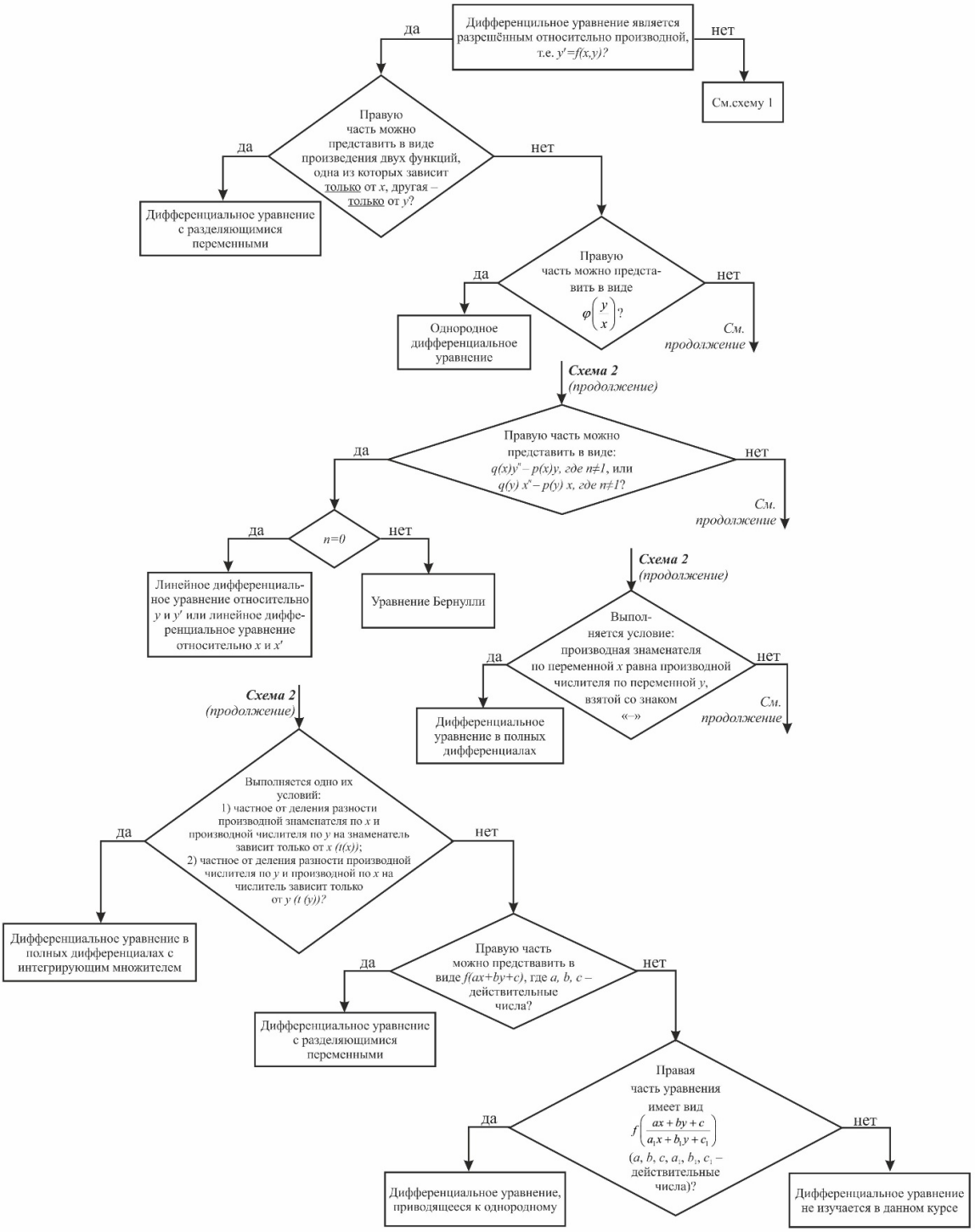


Рис. 2. Определение вида дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной

Задачи прикладного характера, как правило, решаются в три этапа: 1) составление дифференциального уравнения; 2) решение уравнения; 3) интерпретация результатов. При этом в пособии «Дифференциальные уравнения» под общей редакцией профессора Н. Я. Виленкина, рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Установить величины, изменяющиеся в данном явлении, и выявить физические законы, связывающие их.

2. Выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую мы хотим найти.

3. Исходя из условий задачи, определить начальные или краевые условия.

4. Выразить все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и ее производные.

5. Исходя из условий задачи и физического закона, которому подчиняется данное явление, составить дифференциальное уравнение.

6. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.

7. По начальным или краевым условиям найти частное решение.

8. Исследовать полученное решение.

Для получения наилучших результатов, как показала практика, решение прикладных задач нужно начать с задач, состоящих из одного этапа:

Задача 1. Составить дифференциальное уравнение:

а) процесса изменения температуры тела в среде с температурой t_0, если скорость изменения температуры пропорциональна разности температур тела и среды;

б) изменения скорости при замедленном прямолинейном движении тела массы m_0 под действием сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости (k – коэффициент пропорциональности, использовать второй закон Ньютона);

в) процесса изменения численности населения страны, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его численности.

Затем перейти к задачам, включающим интерпретацию результатов.

Задача 2*(геометрическая интерпретация)*. Найти кривую, проходящую через точку *A(1,0)* и такую, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания (рис. 3).

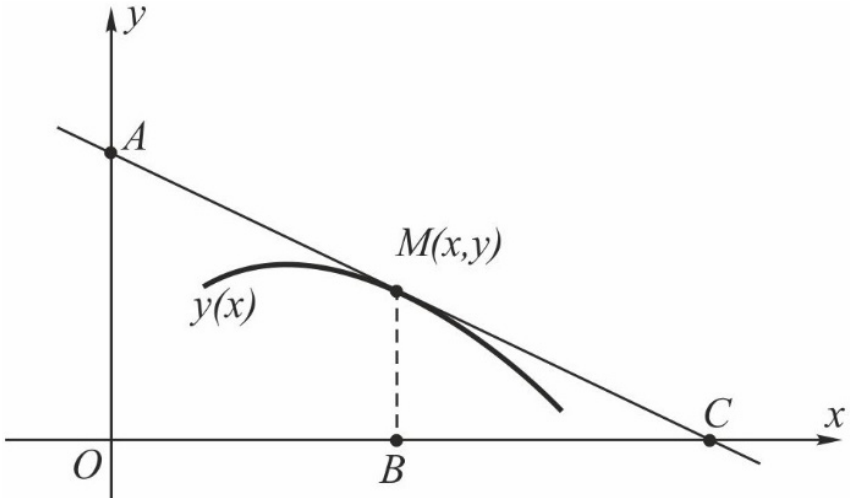


Рис. 3

Задача 3 *(физическая интерпретация)*. Судно водоизмещением *10 000 тонн* движется прямолинейно со скоростью *10 м/с*. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно *20 000Н* при скорости *1 м/с*. Какое расстояние пройдёт судно после выключения двигателя, прежде чем его скорость уменьшится до *2 м/с*?

Такой подход к изучению дифференциальных уравнений, направленный на профессионально значимый материал, способствует повышению качества математических знаний и благоприятствует формированию умений и навыков их применения при изучении профилирующих дисциплин и в профессиональной деятельности.

Библиографический список

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – СПб. : Лань, 2016. – 492 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – Москва : Айрис-пресс, 2011. – 608 с. – (Высшее образование).

3. Пичугина, П. Г. Методические подходы в профессиональной подготовке будущих инженеров по теории вероятностей / П. Г. Пичугина, О. В. Болотникова // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. XIII Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 214–217.

4. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу и др. ; под ред. С. Н. Федина. – 6-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2007. – 592 с. – (Высшее образование).

МОНИТОРИНГ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

И. Н. Литвинова

МОУ «Лицей № 230»,
г. Заречный, Пензенская область, Россия
E-mail: irinalitvinova08@mail.ru

Необходимость использования информационных технологий в процессе управления образовательным учреждением обусловлена рядом причин: растет поток информации, его обработка требует больших затрат. Полученные данные без определенного алгоритма подчас не дают оперативных сведений о том, какие управленческие решения необходи-

мо применить для оптимизации учебно-воспитательного процесса. Работа школы в инновационном режиме требует многогранного анализа образовательной среды, прослеживания динамики изменений и своевременной корректировки.

Информатизация образовательного учреждения – это процесс создания единой информационной и образовательной среды, которая включает совокупность технических, технологических, программных, функциональных, мультимедийных, информационных, телекоммуникационных и методических средств. Эти средства позволяют использовать новые информационные технологии, осуществлять сбор, хранение и обработку информации по всем аспектам деятельности школы, что обеспечивает выход на новый качественный уровень образования и управления.

В своей деятельности мы выделяем два направления информатизации лицея: образовательное и управленческое, которые неразрывно связаны друг с другом. Во главу ставится процесс обучения со всеми своими особенностями, а компьютерные средства – это лишь мощный инструмент, позволяющий решать новые дидактические задачи.

Цель нашей работы в этом направлении – построение информационного пространства лицея.

Задачи:

1. Грамотное использование информационных технологий в управлении лицеем.
2. Введение информационных технологий в процесс обучения учащихся.
3. Развитие информационно-имиджевой деятельности лицея.
4. Разработка мониторинга процесса информатизации.

Остановимся на решении первой задачи. Внедрение информационных технологий в процесс управления прошло несколько этапов.

Первый этап – использование продукта Microsoft Office для ведения документации, составления отчета по успеваемости, обработки результатов различных мониторингов (например, состояния здоровья, образовательных потребностей родителей и т.д.).

Второй этап – создание автоматизированных рабочих мест сотрудников администрации лицея и педагогов, психолога, библиотекаря, классных воспитателей.

Результатом этой работы стал первый шаг на пути формирования единого информационного пространства лицея, что привело к повышению эффективности процесса принятия решений и планирования на основе достоверной информации о состоянии учебно-воспитательного процесса.

Третий этап – это построение мониторинга качества образовательной среды.

В настоящее время активно развивается система менеджмента качества в образовании [1], одним из основных элементов которой является мониторинг качества обучения и эффективности учебного процесса [2]. Обеспечение качества и эффективности обучения существенным образом определяется учебно-методической средой, материальной базой, способностью педагогического коллектива, финансовым обеспечением, информационным обслуживанием учебного заведения, подготовленностью и мотивацией учащихся. По сути это потенциал учебного заведения, т.е. его возможности в области образовательной деятельности. Качество подготовки выпускников определяется эффективностью использования потенциала учебного заведения.

В современной педагогике критериев подготовки учащихся к жизни достаточно много: качество знаний, степень обученности, уровень сформированности ключевых компетенций учащихся и другие. Традиционно эти данные заносятся в таблицы, в лучшем случае показатели представляются в виде столбчатых диаграмм, что несет мало информации для анализа и принятия соответствующих решений. Мы предлагаем любые данные мониторинга по различным аспектам, критериям представлять в виде лепестковой диаграммы. Внешний контур диаграммы соответствует 100 %. Лепестковая диаграмма позволяет отслеживать в системе менеджмента качество и эффективность обучения в лицее. Приведем это на примере качества знаний, одного из основных показателей мониторинга эффективности обучения.

При построении диаграммы показатели качества по каждому предмету в учебном классе усредняются, если класс разбивается на 2 подгруппы.

Для мониторинга качества (или показателя эффективности обучения) целесообразно проводить мониторинг в следующей последовательности:

– для каждой параллели выложить в диаграмму все изучаемые предметы;

– диаграмму составлять по результатам 1 и 2 полугодий и на конец учебного года в целом;

– мониторинг проводить ежегодно, что позволит путем наложения ежегодных диаграмм отслеживать динамику развития соответствующего показателя по любому предмету в течение всего цикла обучения;

– для своевременной реакции педагогического коллектива на недопустимые отклонения отдельных показателей необходимо установить граничные (минимально допустимые) значения параметра качества (например, 75 %);

– диаграмму можно трансформировать применительно к любому исследуемому учебному процессу. Например, по анализу одного предмета в различных классах (на лучах диаграммы откладываются показатели по данному предмету в различных классах) и т.д.

Диаграмма может быть использована и по оценке эффективности работы преподавателей.

Преимуществом использования лепестковых диаграмм является то, что они легко трансформируются применительно к исследуемому параметру, позволяет вводить в диаграмму любое количество параметров, диаграмма автоматически строится с использованием средств программы Microsoft Excel.

В качестве примеров на рис. 1 представлена диаграмма по учебным предметам естественно-математического цикла для 8 классов, что позволяет отследить качество обучения по всем изучаемым предметам в каждой параллели, провести сравнительную характеристику для классов и выявить проблемные зоны. В качестве граничного значения успеваемости на диаграммах принято 75 %.

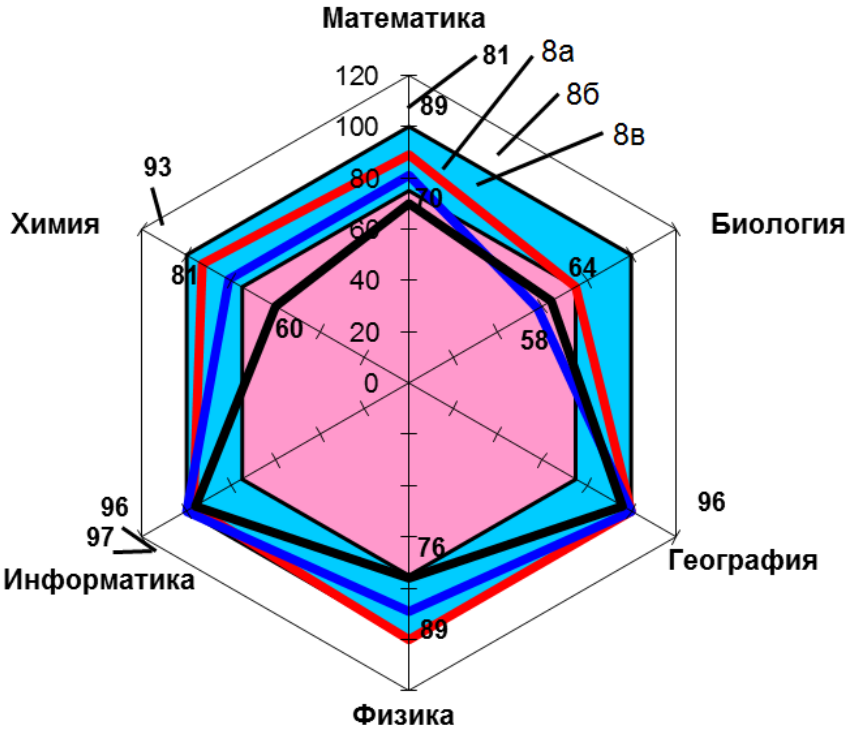


Рис. 1. I полугодие 2018/2019 учебный год, восьмые классы

На рис. 2, 3 показано также качество обучения по химии и информатике. Здесь явно просматривается низкое качество учебы по химии в 8а классе (60 %), 10э классе (59 %) и по информатике в 9б (36 %). На основании полученных данных во втором полугодии были приняты соответствующие меры, позволившие существенно повысить качество учебы в указанных классах.

Таким образом, постоянный мониторинг, проводимый в течение всего цикла обучения учащихся, позволяет оперативно влиять на качество и эффективность обучения.

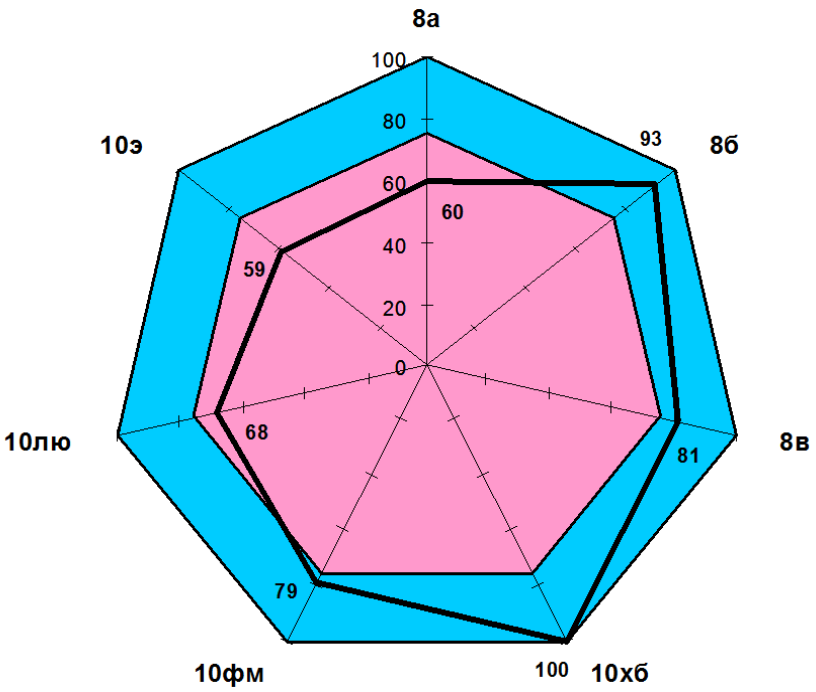


Рис. 2. I полугодие 2018/2019 учебный год, химия, учитель Иванов И.И.

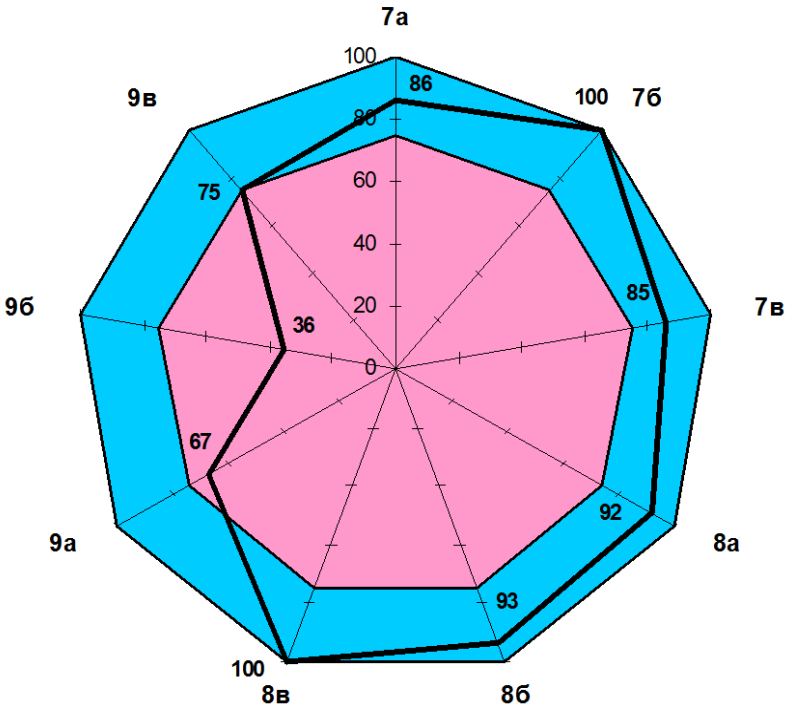


Рис. 3. I полугодие 2018/2019 учебный год, информатика, учитель Петров А.А.

Библиографический список

1. Соловьев, В. П. Системы менеджмента качества в образовании : учеб.-метод. пособие / В. П. Соловьев, Ю. С. Карабасов. – Москва : Изд-во Моск. гос. ин.-та стали и сплавов, 2005. – С. 48.

2. Системы менеджмента качества. Госстандарт РФ, ГОСТ РИСО 9001-2001. – Москва, 2001. – С. 42.

СОДЕРЖАНИЕ

1. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Длина фазовой траектории и коэффициенты нелинейных искажений наблюдаемых для классической частицы в потенциале Калоджеро 3

Имомназаров Б. Х., Dang Quang A., Турдиев У. К., Коробов П. В. Задача Коши для системы уравнений типа Бюргерса 9

Имомназаров Х. Х., Герасимов В. В. Лучевое решение динамической задачи пороупругости для SH-волн 14

Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М. Об одной начально-краевой задаче для уравнений двухскоростной гидродинамики 19

Мегралиев Яшар Топуш оглу, Велиева Вахар Камал кызы Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни – Люка с интегральным условием первого рода 24

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Захарушкина И. С., Грозная Е. В. О применении спектральных методов к решению интегральных уравнений Вольтерра 28

Коротченко М. А., Бурмистров А. В. Алгоритмы метода Монте-Карло для решения уравнения Смолуховского со случайными коэффициентами 35

Шалдаева А. А., Кудряшова Н. Ю. Применение непрерывного метода решения операторных уравнений к нахождению всех решений нелинейных алгебраических уравнений 40

Кормишина В. В. Методы граничных интегральных уравнений при моделировании тепловых процессов 46

Овчарев О. В. Методы граничных интегральных уравнений граничного управления колебательными процессами с распределенными параметрами 51

Алексеев И. Ю., Кудряшова Н. Ю. Численные методы решения дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка 55

Ирышкова Ю. В., Кудряшова Н. Ю. Разностные методы решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами 59

Тында А. Н., Сальников Д. В. Сглаживающие преобразования слабосингулярных интегродифференциальных уравнений Вольтерра второго рода 64

Морозов П. И., Романова Е. Г. Применение метода решающих деревьев 71

Бойков И. В., Степанов Н. С. К приближенному решению прямых задач рассеяния на телах произвольной формы 76

Бойкова А. И., Елпатова В. С. Применение методов Монте-Карло к вычислению интегралов на фракталах 83

Тында А. Н., Бобров В. В., Мойко Н. В. Аппроксимация кратных интегралов со слабыми особенностями 88

Ванина Е. Н., Серова Е. Ю., Симутина Л. А. Решение краевых задач с внутренними граничными условиями средствами PDE Toolbox 92

Егорова А. А., Кудряшова Н. Ю. Экономичные разностные схемы для решения многомерных задач математической физики 96

Тында А. Н., Тимошенков К. А. Сплайн-коллокационный метод решения граничных интегральных уравнений для уравнения Лапласа в пространственных областях 100

Хубежты Ш. С., Бесаева З. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с применением многочленов Лежандра 111

Чевтаев А. А. Исследование явления Гиббса 115

Тында А. Н., Жбанова А. С. Методы коллокации решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами 123

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

Разокзода С. Дж., Артюхин В. В. Моделирование онкологических заболеваний 129

Прасолов А. В. О динамике макроэкономики с различной квалификацией труда 132

Зайцев В. Д., Мамедова Т. Ф. О моделировании рисков инвестиционных проектов 136

Рафиков Р. Н., Якупов З. Я. Прогнозирование численности населения Казани 141

Гульманова А. В. Модель «волны бегства и погони» и «пространственного перемещения» в модели «хищник–жертва» 143

Мамедова Т. Ф., Якунина А. Д. О математическом моделировании экономического роста 147

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

Искандаров И. К., Имомназаров Х. Х., Куйлиев С. К. Об одной внешней краевой задаче для одной переопределенной системы на плоскости 152

Искандаров И. К., Имомназаров Х. Х., Куйлиев С. К. Регулярность задачи для одной переопределенной системы на плоскости 156

Кревчик В. Д., Разумов А. В., Мойко И. М. Эффекты электрического и магнитного полей в спектрах двойной фотоионизации двухэлектронных примесных центров в квазинульмерных структурах 160

Меньшакова Т. В., Сыромясов А. О. Термодинамическое взаимодействие двух круглых частиц на плоскости 167

Горбылева К. О., Егорова Д. К. Реализация одной модели неметрического многомерного шкалирования 172

Рассадин А. Э. Асимптотическое решение уравнения Кардара – Паризи – Цванга для слабофрактального начального профиля с цилиндрической образующей 178

Шакиров А. Ш., Галимова Р. К., Якупов З. Я. Проблемы прогнозирования в золь-гель технологиях 184

Абрамов И. А., Митрофанова К. В. Определение формы пластины при воздействии удара на графическом процессоре 188

Кривулин Н. П., Колотилов М. О. Восстановление входных сигналов нестационарных измерительных преобразователей 193

Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одновременном определении параметров гравитирующих тел в обратной задаче теории логарифмического потенциала 196

Рудин А. В., Семенов И. М., Рубцов И. А., Потешкин С. А., Никитина М. С. Обнаружение и локализация микротрещин в металлических конструкциях методом акустоимессионного бинарного датчика 203

5. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

Стенькин Д. А., Горбаченко В. И. Применение сетей радиальных базисных функций для решения обратных краевых задач математической физики 210

Козинова А. А., Тарасов Д. В., Юнин А. П. Построение нейросетевой модели для оценки близости кодов длиной 256 бит к «белому» шуму по распределению сверток Хэмминга по модулю два 216

Краснухина К. А., Захарова Ю. Ф. Построение 3D-моделей при помощи нейронной сети 221

Морозов П. В. Об одном приближенном методе построения изображений 225

Новиков Р. И., Романова Е. Г. Классификация объектов по признакам с помощью алгоритма логистической регрессии 230

Вертяшкина А. А., Захарова Ю. Ф. Построение 2D-изображений при помощи нейронной сети 235

Абрамов И. А., Штыков Г. А. Реализация распознавания изображений на основе корреляционного сопоставления с помощью графического процессора 239

Березин А. А., Захарова Ю. Ф. Криптографическая уязвимость алгоритмов с открытым ключом 243

Сипягина Е. Е., Черушева Т. В. Определение родственных связей по записям голосов 247

Салимов Г. Ю., Захарова Ю. Ф., Теркин И. М., Петрук М. А. Развитие доработанного алгоритма (RU2323521C2) помехоустойчивого кодирования для обеспечения защиты информации хранимой в микросхемах постоянных запоминающих устройств 252

Данилина Е. А., Королёва Д. А., Шибанов С. В. Моделирование сложных событий в виде сетей Петри 257

Макарова С. Е., Захарова Ю. Ф. Криптографическая стойкость ключей и цифровых подписей в различных криптосеансах 261

Паршикова Э. С., Черушева Т. В. О выявлении характеристик, отвечающих за близкие по звучанию речевые сигналы 265

Новиков Р. И., Черушева Т. В. Разработка кроссплатформенного мобильного приложения 269

Крюкова Д. В., Захарова Ю. Ф., Захаров О. В. Методы передачи информации по голосовым каналам в сфере охранных систем 275

Яблокова Л. В., Яблоков Д. Е. Обобщенная реализация класса комплексного числа на языке высокого уровня с поддержкой параметрического полиморфизма подтипов 278

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

Варлашина С. Ю., Наземнова Н. В. Мотивация учебной деятельности студентов и создание условий для ее развития при решении геометрических задач.....284

Пичугина П. Г., Болотникова О. В. Изучение дифференциальных уравнений студентами технических направлений 290

Литвинова И. Н. Мониторинг качества образовательной среды с использованием информационных технологий.....294

Научное издание

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем

Материалы
XIII Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов
Россия, г. Пенза, 3–6 июня 2019 г.

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Mathematical and Computer Modelling of Natural Science and Social Problems (MCM-2019)

Proceedings of the Thirteenth International
Conference MCM-2019

Penza, Russian Federation, 3–6 June, 2019

E d i t e d b y
Ilya V. **Boikov**

Все материалы представлены в авторской редакции

Компьютерная верстка Д. В. Тарасова

Подписано в печать 29.05.2019. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 17,67.
Заказ № 143. Тираж 100.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru